Projecto de Filtros

1. Identificação das especificações do filtro:
    a. Frequências de passagem, ω_P, e de corte, ω_S;
    b. Atenuação máxima na banda de passagem, $A_{máx}$, e miníma na banda de corte, A_{min};
2. Aplicar técnicas de *aproximação* para obter a função de transferência do filtro:
    a. Butterworth
    b. Cheviyshev
3. Seleccionar topologia para implementar o filtro:
    a. Secções de 1ªordem, de 2ªordem, etc.;
    b. Secções em cascata;

Aproximação de Butterworth

Função de Aproximação:

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}}$$

Expressão de atenuação:

$$A(\omega) = -10\log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}\right)$$

onde ***N***, representa a ordem do filtro.

Ordem do filtro:

1. Dada a atenuação máxima, $A_{máx}$, podemos obter o valor de $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$A(\omega_p) = A_{max} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}$$

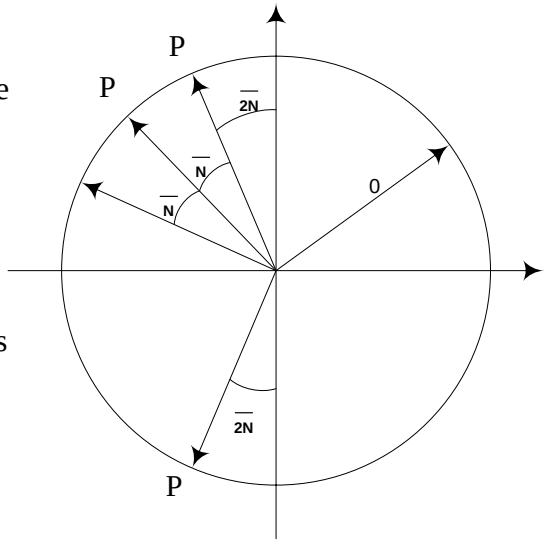
2. Dada a atenuação mínima, $\boldsymbol{A_{min}}$, e sabendo o valor de $\boldsymbol{\varepsilon}$, podemos obter a ordem, ***N***, do filtro:

$$A(\omega_S) \geq A_{\min} \quad \Rightarrow \quad 10\log\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega_S}{\omega_p}\right)^{2N}\right) \geq A_{\min} \longrightarrow N$$

Localização dos pólos:

Os pólos de uma função de Butterworth estão situados sobre uma circunferência de raio igual a $\omega_0 = \omega_p\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}}$.

O primeiro par de pólos complexos conjugados encontra-se uma distância de $\frac{\pi}{2N}$ do eixo imaginário. Os restantes pólos distantam entre sí $\frac{\pi}{N}$ tal como está representado na figura.



A função de transferência fica: $T(s) = \dfrac{\omega_0^{\,N}}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}$

Função de Transferência ***T(S)*** através de tabelas:

Ordem *N*	$H(\hat{S})$
1	$\hat{S}+1$
2	$\hat{S}^2+1{,}414\cdot\hat{S}+1$
3	$(\hat{S}+1)(\hat{S}^2+\hat{S}+1)$
4	$(\hat{S}^2+1{,}848\cdot\hat{S}+1)(\hat{S}^2+0{,}765\cdot\hat{S}+1)$

$T(\hat{S}) = \dfrac{1}{H(\hat{S})}$ onde:

$$T_{LP}(s) = T\left(\hat{S} = \frac{s}{\omega_p}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{N}}\right)$$

$$T_{HP}(s) = T\left(\hat{S} = \frac{\omega_p}{s}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}}\right)$$

Aproximação de Chebyshev

Função de Aproximação:

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 C_N{}^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)}}$$

onde ***N***, representa a ordem do filtro.

Expressão de atenuação:

$$A(\omega) = -10\log\left(1+\varepsilon^2 C_N{}^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)\right)$$

Polinómio de Chebyshev

$$C_0(\Omega) = 1$$
$$C_1(\Omega) = \Omega$$
$$C_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$$
$$C_3(\Omega) = 4\Omega^3 - 3\Omega$$
$$C_{n+1}(\Omega) = 2C_n(\Omega) - C_{n-1}(\Omega)$$

Ordem do filtro:

3. Dada a atenuação máxima, $A_{máx}$, podemos obter o valor de $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$A(\omega_p) = A_{max} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}$$

4. Dada a atenuação mínima, $\boldsymbol{A_{min}}$, e sabendo o valor de $\boldsymbol{\varepsilon}$, podemos obter a ordem, ***N***, do filtro:

$$A(\omega_S) \geq A_{\min} \quad \Rightarrow \quad 10\log\left(1+\varepsilon^2 C_N{}^2\left(\frac{\omega_S}{\omega_p}\right)\right) \geq A_{\min} \longrightarrow N$$

Localização dos pólos:

Os pólos de uma aproximação de Chebyshev estão situados sobre uma uma elipse, e são calculados através da seguinte equação:

$$p_i = -\omega_p \sin\left(\frac{2\cdot i-1}{N}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sinh\left(\frac{1}{N}\cdot\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) + j\omega_p \cos\left(\frac{2\cdot i-1}{N}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{1}{N}\cdot\sinh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

A função de transferência obtida através dos pólos é:

$$T(s) = \frac{1}{\varepsilon\cdot 2^{N-1}}\cdot\frac{\omega_p{}^N}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

Função de Transferência ***T(S)*** através de tabelas**:**

$$T_{LP}(S) = \frac{K}{D(S)}, \text{ onde } S = \frac{s}{\omega_p} \qquad T_{HP}(S) = \frac{K}{D(S)}, \text{ onde } S = \frac{\omega_p}{s}$$

Ordem *N*	**K**	$D(S)$, $\boldsymbol{A_p = 0.5dB}$
1	2,863	$S+2,863$
2	1,431	$S^2+1,425\cdot S+1,516$
3	0,716	$(S+0,626)(S^2+0,626\cdot S+1,142)$

Ordem *N*	**K**	$D(S)$, $\boldsymbol{A_p = 1dB}$
1	1,965	$S+1,965$
2	0,983	$S^2+1,098\cdot S+1,103$
3	0,491	$(S+0,494)(S^2+0,490\cdot S+0,99)$