

LABORATÓRIO DE ELETRÔNICA - DEL 471

Experiência: FILTROS ATIVOS (rev. 1.2c)

1. OBJETIVOS

- a) Estudo de filtros de 2ª ordem implementados com amplificadores operacionais, usando a aproximação conhecida como Butterworth;
- b) projeto, montagem e teste de filtros passa-baixas, passa-altas e passa-faixa.

2. GENERALIDADES

2.1 Definições e características:

Filtro é uma rede que permite a passagem de sinais elétricos dentro de uma faixa de frequências especificada. De acordo com esta faixa, eles se classificam em:

- filtros passa-baixas (FPB);
- filtros passa-altas (FPA);
- filtros passa-faixa (FPF);
- filtros elimina-faixa (FEF).

Dois tipos especiais de redes também podem ser incluídas:

- equalizadores de fase (filtro passa-tudo);
- equalizadores de amplitude.

Os circuitos correspondentes podem ser passivos ou ativos.

Os *circuitos passivos* são formados por redes RLC.

Vantagens:

- operam em frequências altas (até ~500 MHz);
- não necessitam fontes de alimentação;
- apresentam baixas sensibilidades.

Desvantagens:

- ganho é geralmente menor que um;
- o uso do indutor traz problemas, principalmente em baixas frequências (são grandes, caros e sempre introduzem perdas significativas).

Os *circuitos ativos* são formados por redes RC associadas a amplificadores operacionais.

Vantagens:

- redução no tamanho e peso;
- mais econômicos;
- não usam indutores;
- projeto mais simples;
- o ganho pode ser maior que a unidade;

- podem sintetizar várias funções.

Desvantagens:

- exigem fontes de alimentação;
- sensibilidades mais altas que os passivos;
- frequência máxima de operação é limitada pelas características do amplificador.

2.2 Função de Transferência e Sensibilidade

Consideremos o diagrama de bloco do quadripolo correspondente ao filtro, indicado na figura 1.



Figura 1

A função de transferência de tensão é dada por

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (1)$$

O seu inverso é a função de perdas

$$F(s) = \frac{V_i(s)}{V_o(s)} \quad (2)$$

Tomemos como exemplo um filtro passa-baixas. Na figura 2 temos a característica de perdas de um FPB *ideal*, pois correspondente à uma função de transferência que não pode ser realizada fisicamente.

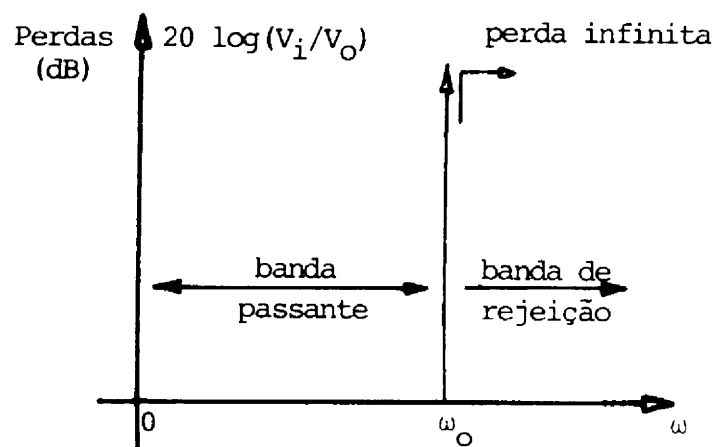


Figura 2

Na figura 3 temos a característica de perdas de um FPB *real*. Neste caso, a função de perdas pode ser realizada por meio de uma função de aproximação apropriada, como as indicadas pelas curvas 1 e 2 da mesma figura.

Normalmente as especificações de um filtro são dadas por:

- a) ω_0 = frequência de corte;
- b) $\omega_s - \omega_0$ = largura da banda de transição;
- c) A_{\max} = perda máxima permissível na banda passante;
- d) A_{\min} = perda mínima permissível na banda de rejeição.

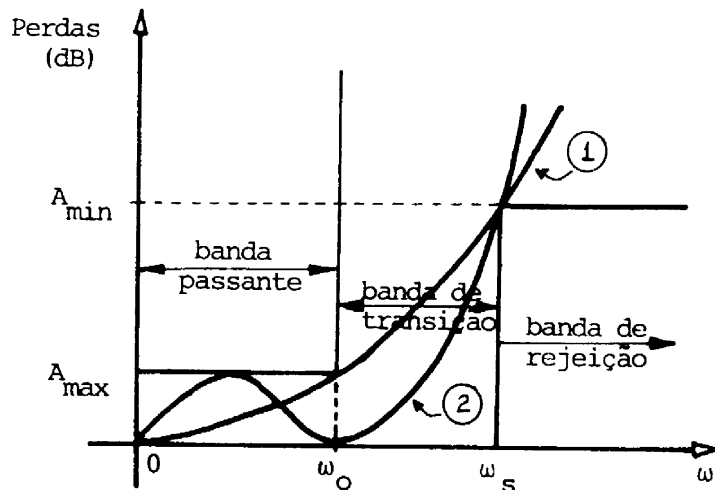


Figura 3

A função de transferência $H(s)$ aparece genericamente na forma

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{P(s)}{Q(s)} = K \frac{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_0} \quad (3)$$

em que:

- K é um fator de escala;
- os zeros de $H(s)$ são as raízes de $P(s)$;
- os pólos de $H(s)$ são as raízes de $Q(s)$.

Para os filtros ativos, exige-se que a rede seja estável e, portanto

- nenhum pólo pode ter parte real positiva;
- não devem existir pólos múltiplos no eixo imaginário.

No entanto, em casos práticos, os valores dos componentes reais se afastam de seus valores de projeto devido a

- tolerâncias iniciais, associadas aos processos de fabricação;
- efeitos ambientais de temperatura e umidade;
- envelhecimento dos componentes devido a reações químicas.

Conseqüentemente o desempenho do filtro diferirá do previsto no projeto original. Nos filtros ativos estas variações podem até tornar instáveis os respectivos circuitos. Uma medida quantitativa das variações sofridas pela rede, devido a variações em seus parâmetros, é a chamada *sensibilidade*.

A *Sensibilidade* de um parâmetro p em relação a um elemento x é a variação, por unidade, do parâmetro p , causada pela variação, por unidade, do elemento x . Tem-se

$$S_x^p = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p / p}{\Delta x / x} = \frac{\mathcal{I} p / p}{\mathcal{I} x / x} = \frac{x}{p} \cdot \frac{\mathcal{I} p}{\mathcal{I} x} = \frac{\mathcal{I}(\ln p)}{\mathcal{I}(\ln x)} \quad (4)$$

As seguintes propriedades, facilmente verificáveis, são válidas e simplificam os cálculos da sensibilidade.

1. Se 'p' não depende de 'x', então $S_x^p = 0$
2. Se $p = Cx$, com $C = \text{cte.}$, então $S_x^{Cx} = 1$
3. $S_x^p = -S_x^{1/p}$
4. $S_x^p = -S_{1/x}^p$
5. $S_x^{p_1 p_2} = S_x^{p_1} + S_x^{p_2}$
6. $S_x^{p_1/p_2} = S_x^{p_1} - S_x^{p_2}$
7. $S_{x^n}^p = \frac{1}{n} S_x^p$
8. $S_x^{p^n} = n S_x^p$
9. $S_x^{p_1 + p_2} = \frac{p_1 S_x^{p_1} + p_2 S_x^{p_2}}{p_1 + p_2}$

Exemplo: Consideremos uma rede RLC paralela alimentada por um gerador de corrente, conforme a figura 4(a). Na figura 4(b) tem-se a rede no campo complexo. Calculemos a função de rede

$$Z_{21} = \frac{V_o}{I_1} = \text{impedância de transferência direta}$$

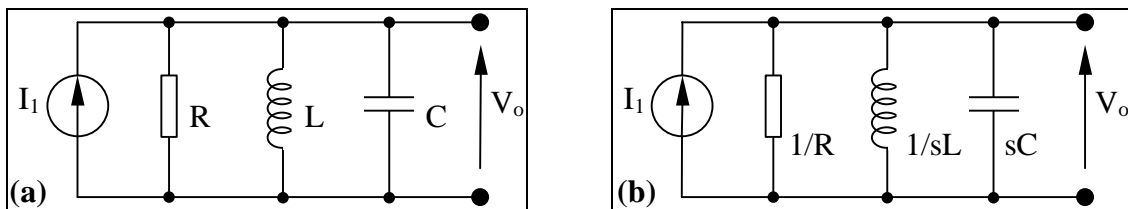


Figura 4

$$Z_{21} = \frac{I_1}{Y(s)} \cdot \frac{1}{I_1} = \frac{1}{Y(s)} = \frac{1}{sC + \frac{1}{R} + \frac{1}{sL}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{s}{s^2 + s \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

Definindo

- $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ = frequência do polo;
- $1/RC = \omega_0 / Q_0$, em que $Q_0 = \omega_0 RC = R \sqrt{C/L}$ = índice de mérito do pólo;
- $K = 1/C$ = ganho; um valor constante associado a um fator de escala,

resulta

$$Z_{21} = K \frac{s}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2} = K \frac{P(s)}{Q(s)}.$$

As sensibilidades podem ser calculadas usando-se as propriedades mencionadas.

Resultam

$$\begin{aligned} S_C^K &= S_C^{1/C} = -S_C^C = -1 \\ S_L^K &= S_R^K = 0 \\ S_L^{\omega_0} &= S_L^{(LC)^{-1/2}} = S_L^{KL^{-1/2}} = S_L^{L^{-1/2}} = (-1/2) S_L^L = -1/2 \\ S_C^{\omega_0} &= S_C^{(LC)^{-1/2}} = -1/2 \\ S_R^{\omega_0} &= 0 \\ S_R^{Q_0} &= S_R^{R\sqrt{C/L}} = S_R^{KR} = S_R^R = 1 \\ S_C^{Q_0} &= S_C^{KC^{1/2}} = S_C^{C^{1/2}} = 1/2 \\ S_L^{Q_0} &= S_L^{KL^{-1/2}} = S_L^{L^{-1/2}} = -1/2 \end{aligned}$$

Valores de S menores do que 1 (em módulo) são considerados bons, *i.e.* pouco sensíveis. As redes passivas, como a deste exemplo, apresentam baixas sensibilidades. Nos filtros ativos, as sensibilidades são maiores devido ao elemento ativo. O estudo da sensibilidade em filtros ativos foi extensamente tratado por vários autores que concluíram que, do ponto de vista de sensibilidade, é melhor realizar uma função de ordem elevada através de sua decomposição em funções de segunda ordem; Se a ordem for ímpar, inclui-se também uma rede de primeira ordem. Estas redes são ligadas em cascata. Vamos então estudar com mais detalhes as funções de transferência de segunda ordem.

2.3 Redes de Segunda Ordem:

Consideremos a função de transferência genérica de 2ª ordem

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + \dots + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + \dots + a_0} \quad (5)$$

em que os a_i e b_i são coeficientes reais. Esta função é denominada *biquadrática*. Dela resultam as várias funções de filtragem, conforme os valores atribuídos aos coeficientes:

FPB: $b_1 = b_2 = 0, a_2 = 1$

FPA: $b_1 = b_0 = 0, a_2 = 1$

FPP: $b_2 = b_0 = 0, a_2 = 1$

FEF: $b_2 = 0, a_2 = 1$

Equalizador de fase: $b_2 = a_2 = 1, b_0 = a_0,$
 $b_1 = -a_1; (a_1 > 0)$

2.3.1 Exemplo de filtro passa-baixas passivo de 2ª ordem

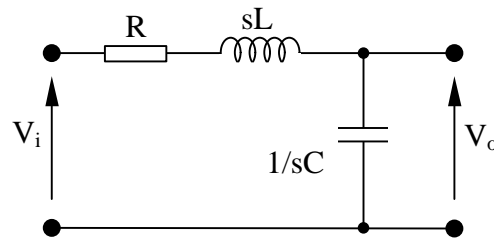


Figura 5

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{1/LC}{s^2 + sR\sqrt{C/L} + \frac{1}{LC}}$$

Fazendo $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ e $Q_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{R\sqrt{C/L}}$ tem-se

$$H(s) = H_0 \frac{\omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2}$$

em que H_0 é o ganho na frequência zero ($s = 0$) e que, neste caso, vale um.

2.3.2 Exemplo de filtro passa-altas passivo de 2ª ordem

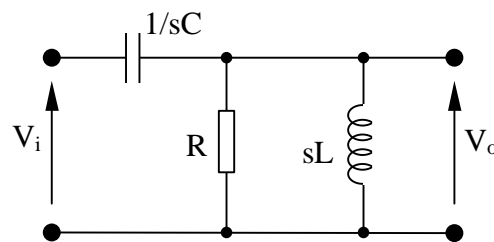


Figura 6

$$H(s) = \frac{\frac{sRL}{R + sL}}{\frac{1}{sC} + \frac{sRL}{R + sL}} = \frac{s^2}{s^2 + s(1/RC) + 1/LC} = \frac{s^2}{s^2 + s\frac{1}{R}\sqrt{L/C} + \frac{1}{LC}}$$

Fazendo $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ e $\frac{1}{Q_0} = \alpha = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$, vem

$$H(s) = H_0 \frac{s^2}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2}$$

em que $H_0 = 1$ é o ganho em frequências altas ($s \rightarrow \infty$)

2.3.3 Exemplo de filtro passa-faixa passivo de 1ª ordem (resultando, porém, em polinômio de segundo grau)

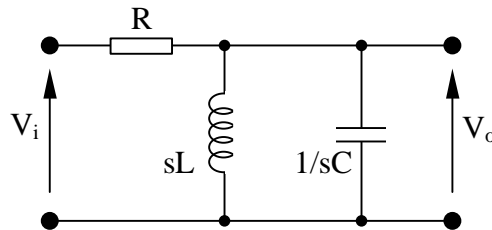


Figura 7

$$H(s) = \frac{\frac{sL}{s^2 LC + 1}}{R + \frac{sL}{s^2 LC + 1}} = \frac{s(1/RC)}{s^2 + s \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}\sqrt{LC}} + 1/LC} = \frac{s \frac{1}{R} \sqrt{L/C} \frac{1}{\sqrt{LC}}}{s^2 + s \frac{1}{R} \sqrt{L/C} + 1/LC}$$

Fazendo: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ e $\frac{1}{Q_0} = \alpha = \frac{1}{R} \sqrt{L/C}$, resulta

$$H(s) = H_0 \frac{s(\omega_0 / Q_0)}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2}$$

em que $H_0 = 1$, correspondente ao ganho em $s = j\omega_0$.

A função passa-faixa também pode ser realizada ligando-se um FPB e um FPA em cascata.

2.3.4 Exemplo de filtro elimina-faixa passivo de 1ª ordem (resultando, porém, em polinômio de segundo grau)

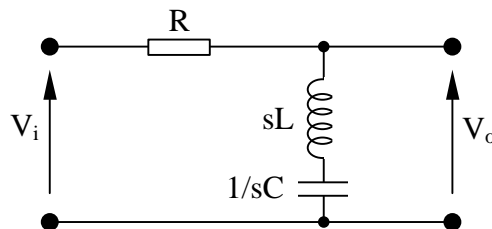


Figura 8

$$H(s) = \frac{\frac{s^2 LC + 1}{sC}}{R + \frac{s^2 LC + 1}{sC}} = \frac{s^2 LC + 1}{s^2 LC + sRC + 1} = \frac{s^2 + 1/LC}{s^2 + sR\sqrt{C/L} \frac{1}{\sqrt{LC}} + 1/LC}$$

Fazendo: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ e $\frac{1}{Q_0} = \alpha = R\sqrt{C/L}$, vem

$$H(s) = H_0 \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + s\frac{\omega_0}{Q_0} + \omega_0^2}$$

em que $H_0 = 1$ para $s \rightarrow 0$ e para $s \rightarrow \infty$.

2.3.5 Exemplo de equalizadores de fase

Em geral os filtros não apresentam resposta de fase linear com frequência. Nas aplicações de transmissão de voz ou música isto não tem importância, pois o ouvido humano não é sensível à variação de fase. Entretanto, na transmissão de pulsos, é desejável que todos os harmônicos tenham o mesmo tempo de atraso, a fim de que haja uma perfeita recomposição harmônica. No domínio do tempo, um filtro ideal é aquele que fornece uma saída proporcional à entrada, admitindo apenas um atraso de T segundos (figura 9). O equalizador de fase tem a função de tornar o atraso total (filtro + equalizador) igual para todos os harmônicos. Na figura 10 temos um exemplo de circuito equalizador.

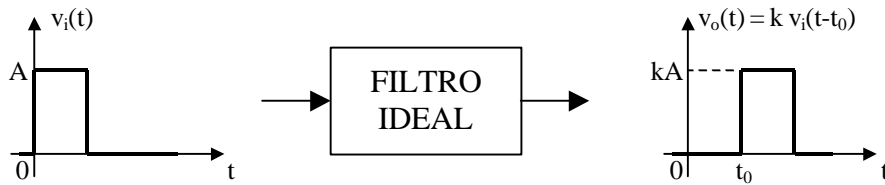


Figura 9

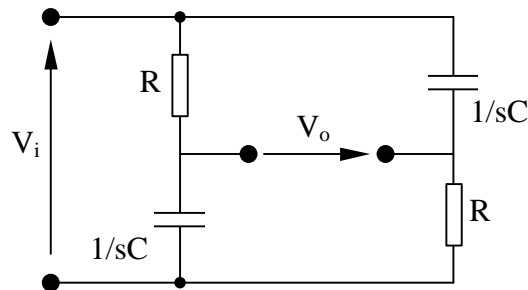


Figura 10

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + 1/sC} - \frac{1/sC}{R + 1/sC} = \frac{s - 1/RC}{s + 1/RC}$$

Fazendo $\omega_0 = 1/RC$, tem-se $H(s) = \frac{s - \omega_0}{s + \omega_0}$.

Em regime permanente senoidal, com $s = j\omega$, vem

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - \omega_0}{j\omega + \omega_0} \quad \therefore \quad |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^2 + \omega_0^2}{\omega^2 + \omega_0^2}} = 1 \quad (\text{em qualquer frequência})$$

Daí vem o nome de *filtro passa-tudo* dado ao equalizador de fase. O circuito introduz apenas defasagens adicionais, em frequências apropriadas, compensando as defasagens introduzidas pelo filtro.

2.4 A Aproximação Butterworth

Existem diversas funções utilizadas na aproximação da função de perdas desejada, tais como:

- aproximação Butterworth
- aproximação Chebyshev
- aproximação elíptica
- aproximação Bessel

Trataremos aqui apenas da aproximação Butterworth. Consideremos, então, a função genérica de perdas passa-baixas

$$|F(s)|^2 = 1 + |K(s)|^2 = 1 + \left| \frac{N(s)}{D(s)} \right|^2.$$

Em regime permanente senoidal

$$|F(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2 = 1 + \left| \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \right|^2.$$

A função $K(s)$ deve ser escolhida de forma que sua amplitude seja pequena na banda passante do filtro, ou seja deve-se ter $|F(j\omega)|^2 \cong 1$, equivalente a 0 dB. Por sua vez, na banda de rejeição, a amplitude de $K(s)$ deve ser elevada. Na aproximação Butterworth, $K(s)$ é um polinômio na forma $K(s) = P_n(s) = \varepsilon(s/\omega_0)^n$, onde ε é uma constante, n é a ordem do polinômio e ω_0 é a frequência de corte. A correspondente função de perdas é então

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{V_i(j\omega)}{V_o(j\omega)} \right| = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n}} \quad (6).$$

Em $\omega=0$, resulta $|F(j\omega)| = 1$.

Em frequências próximas de zero, onde $\omega \ll \omega_0$, resulta $\varepsilon^2(\omega/\omega_0)^{2n} \ll 1$, de modo que (6) fica na forma

$$\sqrt{1+x^2}, \text{ com } x \ll 1.$$

Mas, $\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2/2 - x^4/8 + x^6/16 - \dots$, para $x \ll 1$, resultando

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n}} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} - \frac{1}{8} \varepsilon^4 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{4n} + \dots$$

Esta expressão nos mostra que as $2n-1$ primeiras derivadas são nulas em $\omega=0$. Logo, a inclinação é maximamente plana em $\omega=0$. Expressa em decibéis a perda vale

$$10 \log_{10} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^{2n} \right] \text{ dB}$$

Em $\omega=0$ a perda vale $10 \log_{10} [1 + \varepsilon^2] \text{ dB}$. Como a função é monotônica, a perda máxima permissível ocorre em $\omega=0$ (figura 11). Portanto

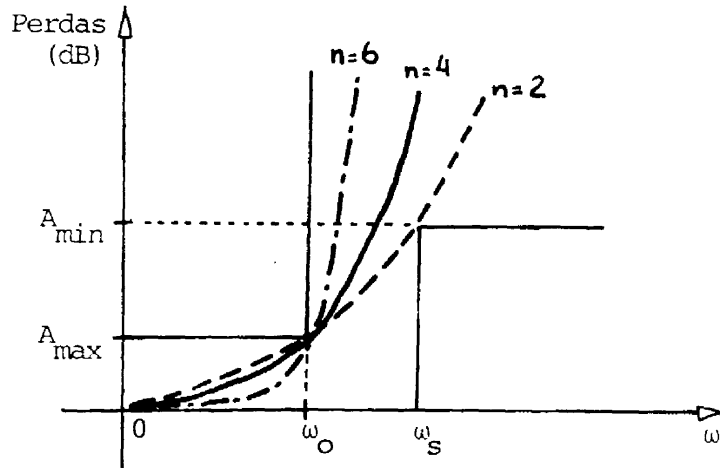


Figura 11

$$A_{\text{máx}} = 10 \log_{10} [1 + \varepsilon^2] \text{ , em que } \varepsilon = \sqrt{10^{0,1 A_{\text{máx}}} - 1} \quad (7)$$

Em frequências altas $(\omega/\omega_0)^{2n}$ fica muito maior que 1 e a perda aproxima-se de:

$$\text{Perda} = 10 \log_{10} [\varepsilon^2 (\omega/\omega_0)^{2n}] = 10 \log_{10} [\varepsilon^{1/n} (\omega/\omega_0)]^{2n} = 20n \log_{10} [\varepsilon^{1/n} (\omega/\omega_0)]$$

A equação mostra que as perdas aumentam a uma taxa de $20n$ (dB/década) ou $6n$ (dB/oitava). Portanto o grau do polinômio controla a inclinação da característica de perdas na região fora da banda passante tal como indicada na figura 11. A relação $\varepsilon^{1/n} \omega/\omega_0 = \Omega$ chama-se frequência normalizada.

O quadrado do módulo de $F(j\omega)$ é dado por

$$|F(j\omega)|^2 = F(j\omega) F(-j\omega) \text{ .}$$

Em termos de frequência normalizada

$$|F(j\Omega)|^2 = F(j\Omega) F(-j\Omega) \text{ .}$$

Esta equação descreve a função de perdas no eixo $j\Omega$. Uma relação mais geral, válida para qualquer $s = \sigma + j\Omega$ (frequência complexa normalizada) é

$$|F(s)|^2 = F(s) F(-s) \quad (8).$$

As raízes de $F(-s)$ são as raízes de $F(s)$ refletidas em relação à origem do plano s , tal como indicado na figura 12.

Como a rede deve ser estável, e como tais raízes são os pólos da função de transferência $H(s)$, devemos selecionar aquelas que se encontram no semi-plano esquerdo da variável s . Para a aproximação Butterworth tem-se

$$|F(j\Omega)|^2 = 1 + \Omega^{2n} = 1 + [-(j\Omega)^2]^n$$

que, estendida ao domínio s , fornece

$$|F(s)|^2 = 1 + (-s^2)^n$$

As raízes são dadas por $1 + (-s^2)^n = 0$, que aparecem na forma $s_k = \Sigma_k + j\Omega_k$, com

$$\Sigma_k = \sin\left[\frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2}\right] \quad (9)$$

$$\Omega_k = \cos\left[\frac{2k+1}{n} \frac{\pi}{2}\right] \quad (10)$$

e $k = 1, 2, \dots, 2n$.

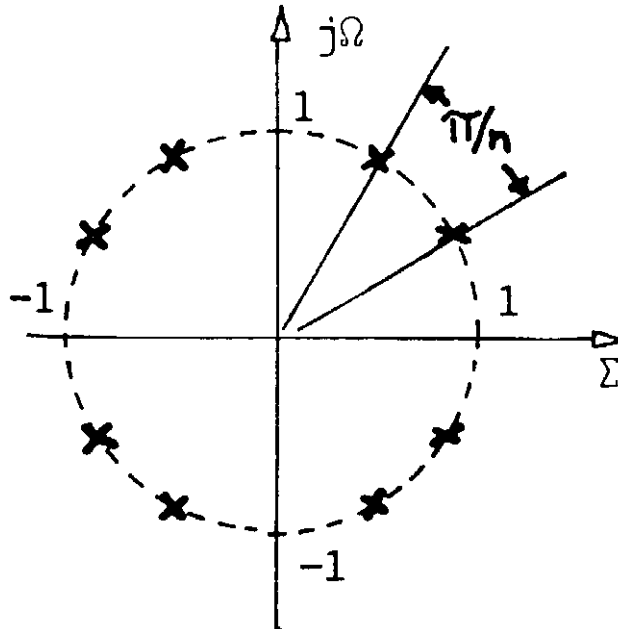


Figura 12

Elevando (9) e (10) ao quadrado e somando tem-se $\Sigma_k^2 + \Omega_k^2 = 1$ ou seja, as $2n$ raízes de $|F(s)|^2 = 0$ estão situadas em um círculo de raio unitário, centrado na origem (figura 12) e igualmente espaçadas de π/n radianos.

Exemplo: Achar a função de transferência de um filtro passa-baixas Butterworth de 2ª ordem.

Tem-se $n = 2$, de onde $\pi/n = \pi/2$ e $k = 1, 2, 3$ e 4 . Então

$$\begin{aligned} s_1 = \Sigma_1 + j\Omega_1 &\Rightarrow \Sigma_1 = \sin\left[\frac{2+1}{2}\right] \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}/2 & \text{e} & \Omega_1 = \cos\left[\frac{2+1}{2}\right] \frac{\pi}{2} = -\sqrt{2}/2 \\ s_2 = \Sigma_2 + j\Omega_2 &\Rightarrow \Sigma_2 = \sin\left[\frac{4+1}{2}\right] \frac{\pi}{2} = -\sqrt{2}/2 & \text{e} & \Omega_2 = \cos\left[\frac{4+1}{2}\right] \frac{\pi}{2} = -\sqrt{2}/2 \\ s_3 = \Sigma_3 + j\Omega_3 &\Rightarrow \Sigma_3 = \sin\left[\frac{6+1}{2}\right] \frac{\pi}{2} = -\sqrt{2}/2 & \text{e} & \Omega_3 = \cos\left[\frac{6+1}{2}\right] \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}/2 \\ s_4 = \Sigma_4 + j\Omega_4 &\Rightarrow \Sigma_4 = \sin\left[\frac{8+1}{2}\right] \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}/2 & \text{e} & \Omega_4 = \cos\left[\frac{8+1}{2}\right] \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

Tais raízes estão indicadas na figura 13. Para a estabilidade da rede, são escolhidas as raízes s_2 e s_3 ; logo

$$\begin{aligned} F(s) &= (s - s_2)(s - s_3) = [(s + \sqrt{2}/2) + j\sqrt{2}/2] \cdot [(s + \sqrt{2}/2) - j\sqrt{2}/2] = \\ &= (s + \sqrt{2}/2)^2 + 2/4 = s^2 + s\sqrt{2} + 1. \end{aligned}$$

Portanto

$$H(s) = \frac{1}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1}$$

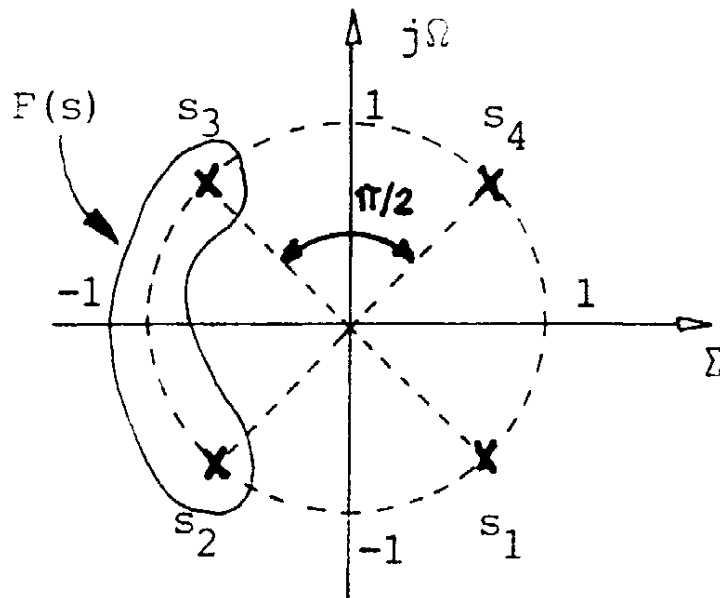


Figura 13

No apêndice desta apostila apresentamos os polinômios de Butterworth (já fatorados) até $n = 8$.

2.5 Topologias:

a) 1ª ordem

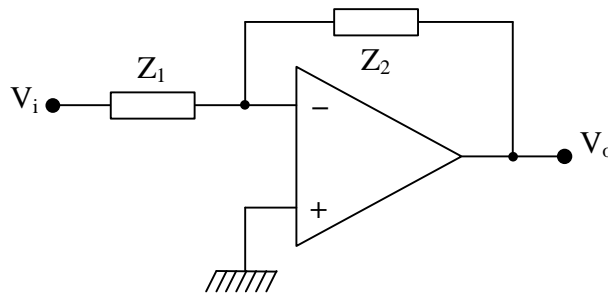


Figura 14

Na figura 14 tem-se o diagrama genérico da topologia usando configuração *inversora*.

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -K \frac{s+a}{s+b}$$

As impedâncias Z_1 e Z_2 são dadas por associações paralelas RC, tal como indicado na figura 15. Resulta

$$H(s) = \frac{\frac{1/C_2}{s + 1/R_2C_2}}{\frac{1/C_1}{s + 1/R_1C_1}} = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{s + 1/R_1C_1}{s + 1/R_2C_2} \equiv -K \frac{s+a}{s+b}$$

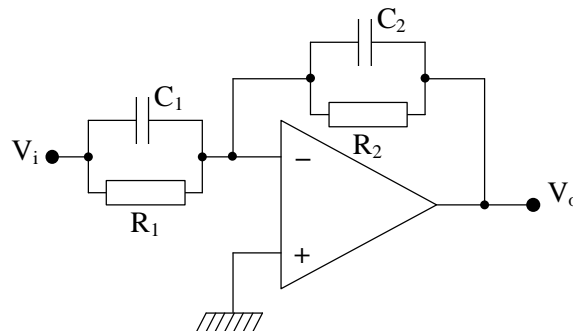


Figura 15

Identificando, vem

$$K = C_1/C_2$$

$$b = 1/R_2C_2$$

$$a = 1/R_1C_1$$

Tem-se 3 relações e 4 incógnitas; logo uma das incógnitas pode ser escolhida previamente. Em princípio tal escolha é arbitrária, desde que ela não conduza a valores negativos ou imaginários para as restantes pois isto não teria amparo físico. Escolhendo $C_1 = 1$, resultam

$$C_2 = 1/K$$

$$R_1 = 1/a$$

$$R_2 = K/b.$$

Estes valores estão normalizados.

b) 2ª ordem

Dentre as diversas topologias que podem ser utilizadas, vamos utilizar a proposta por A. Brigdman e R. Brennan, indicada na figura 16.

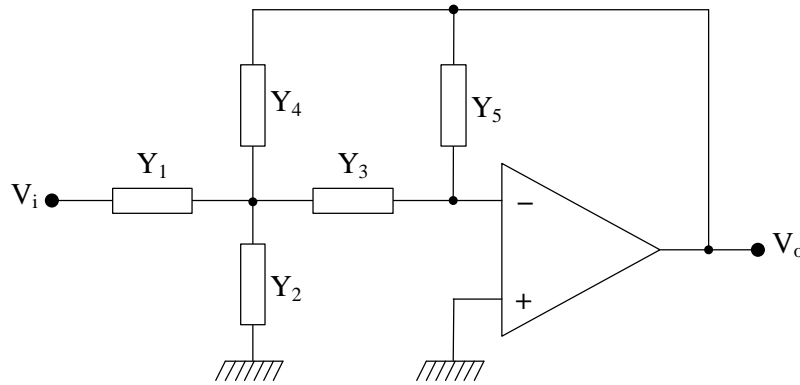


Figura 16

Nesta figura cada Y_i representa a condutância de um único resistor ou a susceptância de um único capacitor. Fazendo-se análise nodal (e considerando amplificador ideal) resulta

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4} \quad (11)$$

Exemplo: Sintetizar a função $H(s) = -\frac{2}{s^2 + 7s + 8}$.

Identificando-a com (11), de imediato, obtém-se $Y_1 Y_3 = 2$, logo, Y_1 e Y_3 devem ser resistivos. Como Y_3 é resistivo, faremos Y_2 e Y_5 capacitivos a fim de obtermos um termo em s^2 . Para obter o termo independente, faremos Y_4 resistivo. Resulta

$$H(s) = \frac{-1/R_1 R_3}{sC_5(1/R_1 + sC_2 + 1/R_3 + 1/R_4) + 1/R_3 R_4}$$

$$H(s) = \frac{-1/R_1 R_3}{s^2 C_2 C_5 + sC_5(1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4) + 1/R_3 R_4}$$

$$H(s) = \frac{-1/R_1 R_3 C_2 C_5}{s^2 + (s/C_2)(1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4) + 1/R_3 R_4 C_2 C_5} \equiv \frac{-2}{s^2 + 7s + 8}$$

Logo

$$1/R_1 R_3 C_2 C_5 = 2 \quad (1/C_2)(1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4) = 7 \quad 1/R_3 R_4 C_2 C_5 = 8$$

Temos 3 relações e 5 incógnitas. Fixando, então, $C_2 = C_5 = 1$, resultam

$$1/R_1 R_3 = 2$$

$$1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4 = 7$$

$$1/R_3 R_4 = 8$$

Finalmente

$$R_1 = 2,5$$

$$R_2 = 1/5$$

$$R_4 = 5/8.$$

Estes valores de R e C estão normalizados.

2.6 Normalização de Impedâncias

Em redes elétricas, os valores numéricos dos componentes diferem entre si por várias ordens de grandeza. Assim, podemos ter resistores de $k\Omega$, capacitores de μF , nF e pF , e indutores de H , mH e μH , o que torna os cálculos exaustivos. É conveniente que tais valores numéricos, para efeito de cálculo, devam se tornar tão próximos quanto possível, o que se consegue normalizando as impedâncias (em duas etapas):

1) Mudança no nível de impedância

Em uma rede elétrica, se dividirmos todos os R , L e $1/C$ por uma constante real positiva R_0 , arbitrariamente escolhida, as correntes ficarão multiplicadas por R_0 , mas o comportamento elétrico da rede não se modifica.

2) Mudança na escala de frequências

Se multiplicarmos todos os L e C por um mesmo fator de escala de frequência ω_0 , que também é um número real e positivo, e simultaneamente dividirmos s por ω_0 , as duas operações se cancelam¹, mas a relação s/ω_0 é mais conveniente para os cálculos. Combinando as duas operações resultam

	nível	frequência	valor normalizado	valor desnormalizado
R	R/R_0	—	$R_n = R/R_0$	$R = R_0 R_n$
L	L/R_0	$\omega_0 L$	$L_n = \omega_0 L/R_0$	$L = R_0 L_n/\omega_0$
C	$1/R_0 C$	$\omega_0 C$	$C_n = \omega_0 R_0 C$	$C = C_n/\omega_0 R_0$

No exemplo anterior, se a frequência de corte superior for $\omega_0 = 2\pi 10^3$ rad/s (que será escolhida como sendo o fator de escala de frequência) e se escolhermos $R_0 = 10^5$, resultam os valores desnormalizados

$$C_5 = C_2 = \frac{1}{2\pi 10^3 10^5} \cong 1,59 \text{ nF} \quad R_1 = 250 \text{ k}\Omega \quad R_3 = 20 \text{ k}\Omega \quad R_4 = 62,5 \text{ k}\Omega$$

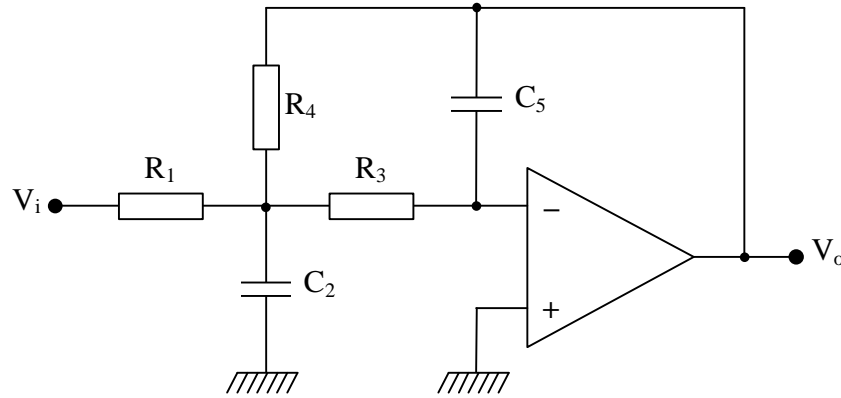


Figura 17

2.7 Exemplos

Para ilustrar o que foi visto até aqui, calculemos um FPB e um FPA, ambos na aproximação Butterworth.

Exemplo 1: FPB, 2ª ordem, ganho unitário, frequência de corte superior $f_0 = 3000$ Hz ($\omega_0 = 18850$ rad/s):

$$H(s) = \frac{-H_0 \omega_0^2}{s^2 + s \alpha \omega_0 + \omega_0^2} \equiv -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

pois usaremos a configuração de Brennan e Bridgman, onde, fazendo $H_0 = 1$ e sendo $\omega_0 = 1$ a frequência normalizada

$$H(s) = \frac{-1}{s^2 + s \alpha + 1}$$

O polinômio Butterworth de 2ª ordem é (*cf.* tabela no apêndice)

$$H(s) = \frac{-1}{s^2 + s\sqrt{2} + 1} \equiv -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

Notemos que Y_1 e Y_3 não podem ser funções de s , logo serão resistores, *i.e.* $Y_1 = G_1$ e $Y_3 = G_3$.

Y_4 deve ser resistivo, *i. e.* $Y_4 = G_4$, e os elementos correspondentes a Y_2 e Y_5 deverão ser necessariamente capacitivos, a fim de que tenhamos, no denominador, o polinômio de 2ª grau em s . Resulta, então

$$H(s) = \frac{-1/R_1 R_3}{s^2 C_2 C_5 + s C_5 (1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4) + 1/R_3 R_4}$$

$$H(s) = \frac{-1/R_1 R_3 C_2 C_5}{s^2 + (s/C_2)(1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4) + 1/R_3 R_4 C_2 C_5} \equiv \frac{-1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

que fornece

$$1/R_1 R_3 C_2 C_5 = 1 \quad (1/C_2)(1/R_1 + 1/R_3 + 1/R_4) = \sqrt{2} \quad 1/R_3 R_4 C_2 C_5 = 1.$$

Fazendo $R_1 = R_3 = 1$ resultam das relações anteriores que

$$\begin{aligned} 1/C_2 C_5 &= 1 & \therefore C_2 C_5 &= 1 \\ 1/R_3 R_4 &= 1 & \therefore R_4 &= 1. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } (1/C_2)3 = \sqrt{2} \quad \therefore C_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad C_5 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Estes componentes estão normalizados. Os componentes reais serão obtidos pelas relações de desnormalização. Fazendo $R_0 = 10^4$ e desnormalizando, vem: $R_1 = R_3 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega$,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{3/\sqrt{2}}{\omega_0 R_0} = \frac{3/\sqrt{2}}{18850 \times 10^4} = 11,1 \text{ nF} \\ C_5 &= \frac{\sqrt{2}/3}{\omega_0 R_0} = \frac{\sqrt{2}/3}{18850 \times 10^4} = 2,5 \text{ nF} \end{aligned}$$

O circuito final está indicado na figura 18. Notemos que

$$H_0 \omega_0^2 = 1/R_1 R_3 C_2 C_5 \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = 1/R_3 R_4 C_2 C_5$$

portanto, o ganho na frequência zero valerá R_4/R_1 .

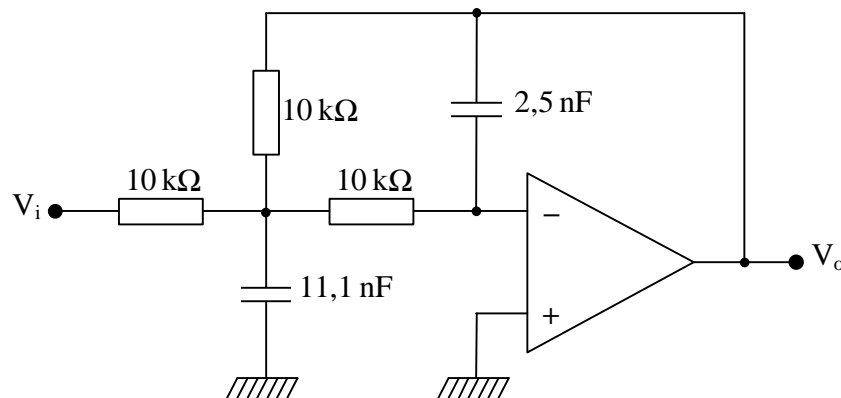


Figura 18

Exemplo 2: FPA, 2ª ordem, frequência de corte inferior $f_0=500$ Hz, ganho unitário.

$$H(s) = \frac{-H_0 s^2}{s^2 + s\alpha\omega_0 + \omega_0^2} \equiv -\frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

Y_1 e Y_3 devem ser do tipo sC_1 e sC_3 , a fim de que tenhamos s^2 no numerador. Devemos ter também $Y_4 = sC_4$ para obtermos s^2 no denominador. Supondo $Y_4 = sC_4$, resultam $Y_2 = G_2$ e $Y_5 = G_5$, o que, por sua vez, fornece

$$H(s) = \frac{-s^2 C_1 C_3}{s^2 C_3 C_4 + s G_5 (C_1 + C_3 + C_4) + G_2 G_5}$$

$$H(s) = \frac{-s^2 C_1 / C_4}{s^2 + s \frac{1}{R_5 C_3 C_4} (C_1 + C_3 + C_4) + \frac{1}{R_2 R_5 C_3 C_4}} \equiv \frac{-s^2}{s^2 + s\sqrt{2} + 1}$$

Neste caso a relação C_1/C_4 fixa o valor do ganho. Resultam

$$C_1/C_4 = 1, \text{ podendo-se assumir que } C_1 = C_4 = 1$$

$$\frac{1}{R_5 C_3 C_4} (C_1 + C_3 + C_4) = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{R_5 R_2} = 1, \text{ de onde}$$

$$\frac{1}{R_5 C_3} (2 + C_3) = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad R_5 R_2 = 1$$

Se fizermos $C_3 = 1 \Rightarrow R_5 = 3/\sqrt{2}$ e $R_2 = \sqrt{2}/3$.

Desnormalizando, para $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ e $\omega_0 = \pi 10^3 \text{ rad/s}$, tem-se

$$C_1 = C_3 = C_4 = \frac{1}{10^3 \pi 10^4} = 31,8 \text{ nF}$$

$$R_2 = 4,7 \text{ k}\Omega \quad \text{e} \quad R_5 = 21,2 \text{ k}\Omega.$$

O circuito final está mostrado na figura 19. Note a liberdade de escolha de parâmetros que resultou na síntese.

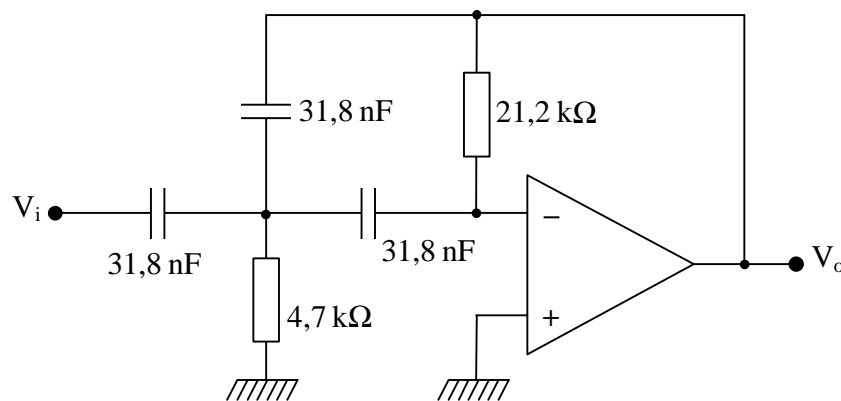


Figura 19

Se ligarmos os dois filtros em cascata, obteremos um filtro passa-faixa, de frequência de corte inferior 500 Hz e superior 3000 Hz. Esta solução é muito boa quando a faixa de passagem deve ser grande.

Exemplo 3: FPF, 2ª ordem, ganho = 2, frequência central $f_0=1$ kHz, índice de mérito $Q=2,5$. Temos

$$H(s) = \frac{-H_0 \alpha \omega_0 s}{s^2 + s \alpha \omega_0 + \omega_0^2}$$

Fazendo $H_0=2$, $\omega_0=1$ (normalizado) e selecionando o polinômio Butterworth de segunda ordem, resulta

$$H(s) = \frac{-H_0 \sqrt{2} s}{s^2 + s \sqrt{2} + 1} \equiv - \frac{Y_1 Y_3}{Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_3 Y_4}$$

Adotando Y_1 resistivo, então Y_3 deve ser capacitivo, *i. e.* $Y_1=1/R_1$, $Y_3=sC_3$. Fazendo $Y_4=sC_4$ resulta um polinômio em s^2 no denominador. Então Y_2 e Y_5 devem ser resistivos, *i. e.* $Y_2=1/R_2$ e $Y_5=sC_5$; portanto

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{-sC_3 / R_1}{1/R_5(1/R_1 + 1/R_2 + s(C_3 + C_4)) + s^2 C_3 C_4} = \\ &= \frac{-s/R_1 C_4}{s^2 + s(1/R_5)(1/C_3 + 1/C_4) + (1/R_5 C_3 C_4)(1/R_1 + 1/R_2)} \end{aligned}$$

Assim $H_0 \sqrt{2} = 1/R_1 C_4$ e $\sqrt{2} = (1/R_5)(1/C_3 + 1/C_4)$ de onde

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2} R_1 C_4} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_5} \left(1 + \frac{C_4}{C_3}\right)}.$$

Fazendo $C_3=C_4=C$, resulta $H_0 = R_5/2R_1$.

A seguir, ao contrário dos exemplos anteriores, inicialmente façamos uma identificação literal (com a expressão genérica do FPF de 2ª ordem), de forma a obter expressões para ω_0 e Q (índice de mérito). Resulta então

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{(1/R_5 C_3 C_4)(1/R_1 + 1/R_2)} = 1/C \sqrt{(1/R_5)(1/R_1 + 1/R_2)} \\ Q &= 1/\alpha = \frac{1}{(1/\omega_0 R_5)(1/C_3 + 1/C_4)} = \frac{\omega_0 R_5 C}{2}. \end{aligned}$$

O índice de mérito também pode ser expresso em função da largura de faixa do FPF. Sendo ω_2 e ω_1 as suas frequências de corte superior e inferior, respectivamente, temos

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad \therefore \quad \omega_2 - \omega_1 = \omega_0/Q = 2/R_5 C \quad \text{ou} \quad f_2 - f_1 = 1/\pi R_5 C.$$

Das relações anteriores

$$\begin{aligned} R_1 &= R_5/2H_0, \quad R_5 = 2Q/\omega_0 C \quad \text{e, com } \omega_0 = 1, \quad R_5 = 2Q/C \\ \therefore R_1 &= 2Q/2CH_0 = Q/H_0 C \\ \omega_0^2 &= (1/R_5 C^2)(1/R_1 + 1/R_2) \Rightarrow R_2 = R_1/(\omega_0^2 R_5 R_1 C^2 - 1) \end{aligned}$$

Com $\omega_0 = 1$ e as equações para R_1 e R_5 , resulta

$$R_2 = Q/(2Q^2 - H_0)C$$

Fazendo $C = 1$, resulta nos seguintes valores normalizados

$$\begin{aligned} C_3 = C_4 &= 1; \quad R_1 = 2,5/2 = 1,25; \quad R_5 = 5 \\ R_2 &= 2,5/(2 \times 2,5^2 - 2) \cong 0,25 \end{aligned}$$

Desnormalizando, com $R_0 = 10 \text{ k}\Omega$ e $\omega_0 = 2\pi \times 10^3$, vem

$$\begin{aligned} R_1 &= 12,5 \text{ k}\Omega, \quad R_2 = 2,5 \text{ k}\Omega, \quad R_5 = 50 \text{ k}\Omega \\ C_3 = C_4 &= 1/2\pi \times 10^4 \times 10^3 = 16 \text{ nF} \end{aligned}$$

O circuito final está indicado na figura 20.

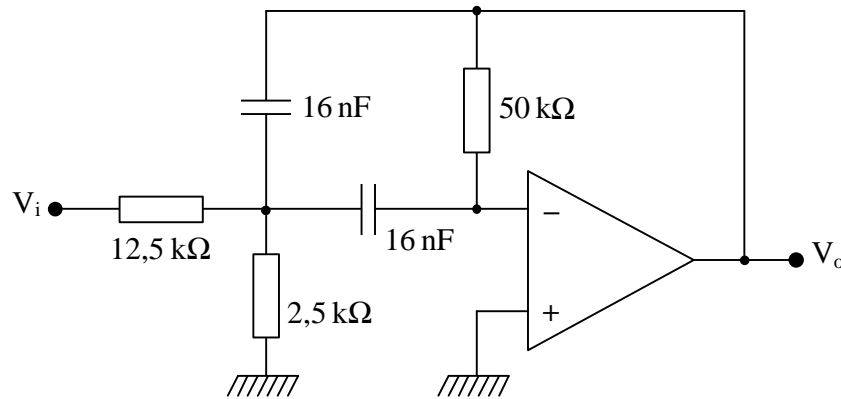


Figura 20

Note que podemos mudar ω_0 , mudando-se R_2 , sem modificar H_0 e a banda passante. Também pode-se mudar C , sem modificar Q e H_0 .

3. PARTE EXPERIMENTAL

1ª Parte: PARÂMETROS ESSENCIAIS

3.1) As bancadas **ímpares** montarão o **FPB** da figura 18, enquanto que as **pares** o **FPA** da figura 19. Todas as bancadas devem medir o ganho máximo H_0 e a frequência de corte a -3 dB a partir da aplicação de um sinal de entrada senoidal. Como os filtros representam sistemas lineares invariantes no tempo (SLIT), então, para uma entrada senoidal, o sinal de saída deve obrigatoriamente também ser senoidal (a relação da amplitude da saída e da entrada representa $|H(j\omega)|$ na frequência considerada; a defasagem entre o sinal de saída e o de entrada representa $\arg[H(j\omega)]$ na frequência considerada). Inicialmente varra manualmente a faixa de frequências em que vai medir a resposta do filtro e confirme que o sinal de saída se mantém sempre senoidal, caso contrário alguma não-linearidade afetará a medição. Elimine a causa desta não-linearidade antes de prosseguir.

3.2) Monte o **FPF** da figura 20 e meça seu ganho máximo H_0 , a frequência central f_0 , a frequência de corte inferior f_1 e a frequência de corte superior f_2 . Calcule o índice de mérito Q através da relação $Q = f_0 / (f_2 - f_1)$.

3.3) Compare os valores experimentais obtidos nos itens anteriores com os valores previstos pela teoria. Explique as causas de eventuais discrepâncias.

2ª Parte: PROJETOS E RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

3.4) Acompanhando o que foi feito no exemplo 1, projete (mas não monte) um FPF de 2ª ordem, inversor, na aproximação Butterworth, de ganho 5, frequência de corte $f_1 = f_0 = 3$ kHz. Adote $R_3 = R_1 = 1$ (normalizado), com $R_0 = 10$ k Ω . Como o FPF é inversor, observe que $H(j0) = -5$.

3.5) Repita o item anterior, acompanhando o exemplo 2, agora para um FPA, a ser projetado com ganho 5, frequência de corte $f_2 = f_0 = 500$ Hz. Adote $C_3 = C_4 = 1$ (normalizado), com $R_0 = 10$ k Ω . Como o FPA é inversor, observe que $H(j\omega) \rightarrow -5$ quando a frequência tende para infinito (na prática quando $f \gg f_c$).

3.6) As bancadas **pares** montarão o **FPB**, enquanto que as **ímpares** o **FPA**. Todas as bancadas determinarão a resposta em frequência do filtro montado. Utilize frequências que permitam obter leituras espaçadas uniformemente em uma escala logarítmica; no FPF inicie em 100 Hz e vá até 30 kHz; no FPA varra entre 50 Hz e 5 kHz. Meça com mais detalhamento nas frequências próximas ao corte. Mantenha a amplitude da entrada **constante** (não se esqueça de anotá-la!) e em um nível que **não cause distorção** (é melhor verificar isto, nas frequências de maior ganho do filtro, **antes** de iniciar as inúmeras medidas, pois se o *slew-rate* do amplificador operacional for atingido haverá não-linearidade; isto poderá ocorrer tanto por amplitude e/ou frequência excessivamente elevadas. Amplitude elevada também poderá causar saturação do filtro.

3.7) Verifique qualitativamente o comportamento da resposta quando o filtro for estimulado por um “degrau” que será aproximado com a aplicação de um sinal quadrado, com frequência suficientemente baixa para que se consiga, a cada semi-ciclo, visualizar a resposta assintótica. A resposta típica de um FPB de segunda ordem ao estímulo de degrau unitário é analisada em textos convencionais de Controles, de Filtros ou até mesmo de Telecomunicações (figura 21).

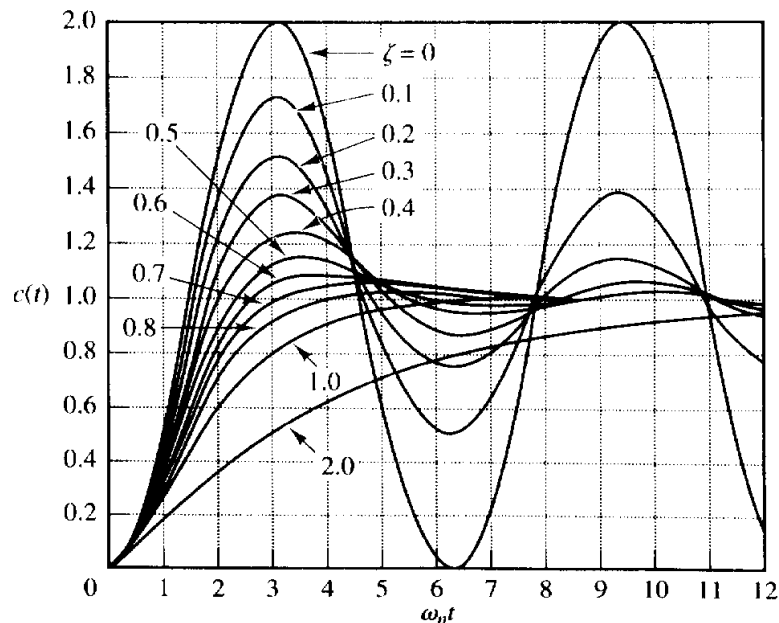


Figura 21: Resposta de sistema passa-baixas de ganho unitário ao degrau, parametrizada em relação ao amortecimento. [5]

A fim de garantir operação em regime linear é necessário manter a amplitude do estímulo suficientemente baixa para não saturar o filtro. Sugere-se ajustar o osciloscópio digital para que ambos os canais tenham a mesma sensibilidade vertical, acoplamento DC e a mesma posição (vertical) da referência de tensão nula (terra). Altere também o nível DC do sinal de entrada, ajustando o valor do *offset DC*.

3.8) Desenhe a curva de resposta em frequência correspondente ao item anterior, *i.e.* $|G|_{dB}$ versus $\log(f)$. Utilize gráfico com eixos monolog. Determine f_0 a partir da curva. Lembre que $|G|_{dB} = 20 \log (V_o/V_i)$.

3.9) Usando o FPB de uma bancada (par) e o FPA de outra (ímpar), ligue os conjuntos em cascata (fig. 22) e repita os itens (3.6) a (3.8) para o filtro passa-faixa assim constituído; vara a frequência entre 50 Hz e 30 kHz, obtendo os dados com algum cuidado e detalhamento, mas procurando não gastar muito tempo. De sua curva de resposta em frequência, determine f_1 e f_2 . Observe o ganho em frequências médias ($f \approx 1,5$ kHz) e verifique se o resultado é coerente com o esperado.

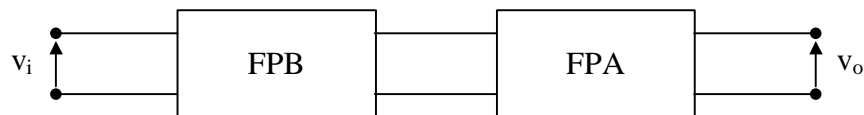


Figura 22

OBS: Havendo tempo disponível, cada bancada repetirá o item 3.6, obviamente, para a montagem ainda não efetuada.

4. REFERÊNCIAS

- [1] L. P. Huelsman, *Active and Passive Analog Filter Design - An Introduction*. Singapore: McGraw-Hill, 1993.
- [2] A. S. Sedra, K. C. Smith, *Microelectronic Circuits, 4th edition*. New York: Oxford University Press, 1998.
- [3] S. Noceti Filho, *Filtros Seletores de Sinais*. Florianópolis: Editora da Universidade Federal de Santa Catarina, 1998.
- [4] S. Franco, *Design with Operational Amplifiers and Analog Integrated Circuits, 3rd edition*. Singapore: McGraw-Hill, 2002.
- [5] K. Ogata, *Modern Control Engineering, 3rd edition*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997.

5. APÊNDICE

FORMA FATORADA DOS POLINÔMIOS DE BUTTERWORTH

GRAU	POLINÔMIO
1	$s + 1$
2	$s^2 + \sqrt{2}s + 1$
3	$(s^2 + s + 1)(s + 1)$
4	$(s^2 + 0,76536s + 1)(s^2 + 1,84776s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0,6180s + 1)(s^2 + 1,6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0,5176s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)(s^2 + 1,9318s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0,4450s + 1)(s^2 + 1,2456s + 1)(s^2 + 1,8022s + 1)$
8	$(s^2 + 0,3986s + 1)(s^2 + 1,1110s + 1)(s^2 + 1,6630s + 1)(s^2 + 1,9622s + 1)$

$$^1 sL = \frac{s}{\omega_0} \omega_0 L \quad \text{e} \quad \frac{1}{sC} = \frac{1}{\frac{s}{\omega_0} \omega_0 C}$$