Processamento Digital de Sinais

Prof. Luciano Leonel Mendes

S. Mitra, Digital Signal Processing – A computer-based approach, 2nd edition.

Capítulo 1 – Sinais e Processamento de Sinais

- Sinal é uma função de uma variável independente, como tempo, distância, temperatura, etc.

  Exemplos:

  - Música, que representa a variação da pressão do ar ao longo do tempo em um ponto do espaço.

  - Foto P&B, que representa a variação da intensidade da luz ao longo de duas coordenadas espaciais.

  - Vídeo, que representa a variação de intensidade de luz ao longo das coordenadas X e Y e também ao longo do tempo.

- Todo sinal carrega algum tipo de informação e o objetivo do processamento do sinal é extrair ou modificar a informação contida no sinal.

Classificação de Sinais

- Classificação quanto à continuidade

  - Sinais contínuos são aqueles que são definidos para todo e qualquer valor da variável independente. Exemplo: a voz humana.

  - Sinais discretos são aqueles cuja amplitude é definida apenas para valores específicos da variável independente.

  Exemplo: temperatura do ensopado tomada de tempos em tempos pela cozinheira.

  Quando as amostras do sinal discreto podem assumir um número finito de valores, então o sinal é classificado como digital.

- Classificação quanto à natureza das amostras

  - Sinais reais são aqueles cujas amostras são todas reais.

  - Sinais complexos são aqueles cuja uma ou mais amostras são complexas.

Classificação de Sinais

- Classificação quanto ao número de fontes

  - Sinais escalares são aqueles provenientes de uma única fonte. Exemplo: sinal de áudio mono.

  - Sinais vetoriais são aqueles provenientes de duas ou mais fontes. Exemplo: sinal de áudio estéreo.
- Classificação quanto à dimensão

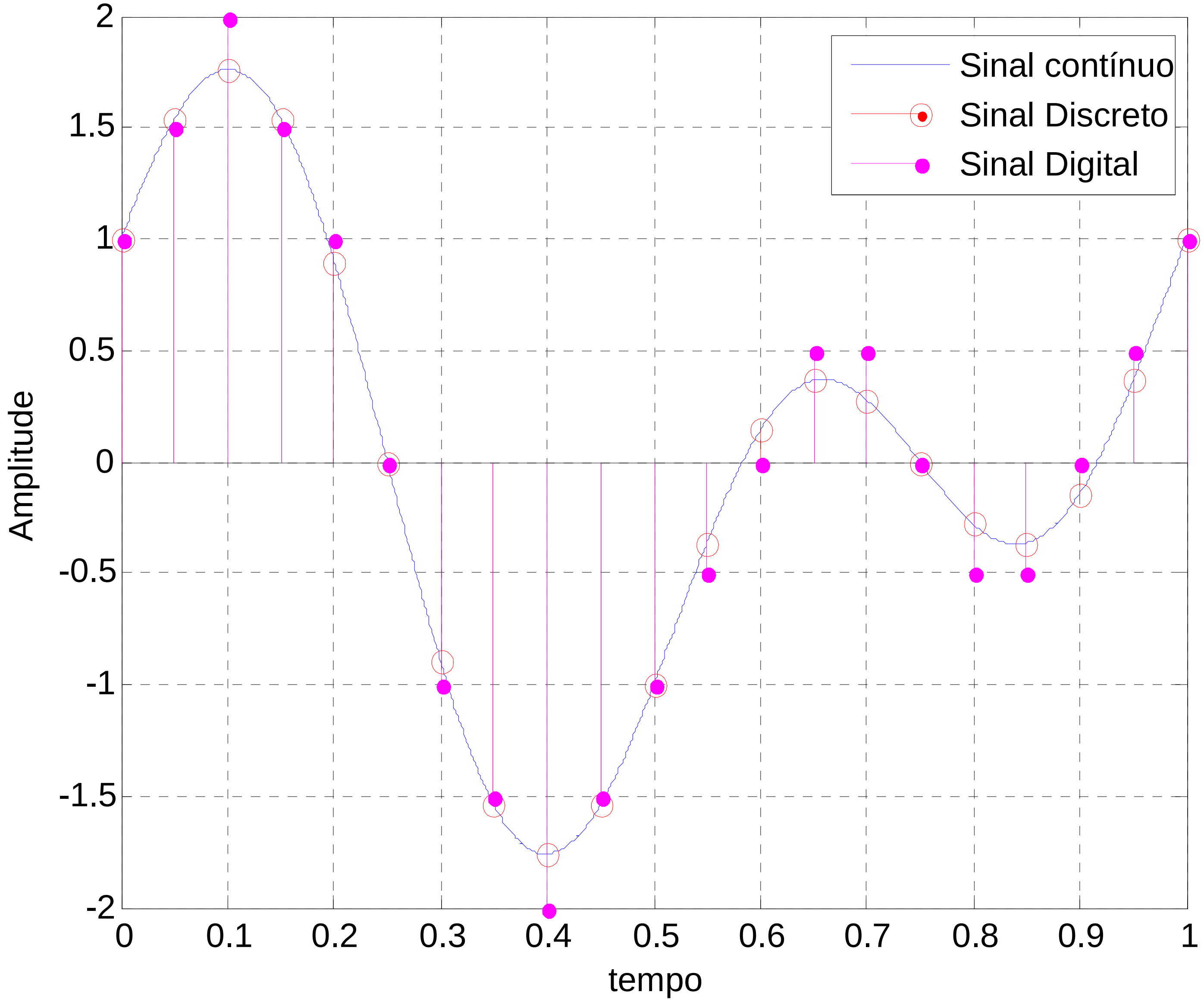
  - Sinais unidimensionais são aqueles que são função de uma única variável independente. Exemplo: sinal de áudio.

  - Sinais M-dimensionais são aqueles que são função de M variáveis independentes. Exemplo: sinal de vídeo P&B.
- Classificação quanto a aleatoridades

  - Sinais determinísticos são aqueles cujo o valor das amostras podem ser previstos. São funções matemáticas ou tabelas conhecidas a priori.

  - Sinais aleatórios são aqueles cujo o valor das amostras não pode ser conhecido previamente.

Classificação de Sinais



Representação de Sinais

- Normalmente os sinais unidimensionais são funções do tempo. Sua representação matemática é dada por:

  - f(t) para o caso contínuo.

  - f[n] para o caso discreto, onde n é um número inteiro.
- A representação de sinais M-dimensionais é feita listado todas as variáveis independentes.

  - f(x,y) ; f(x,y,t) para o caso contínuo.

  - f[n,m] ; f[n,m,k] para o caso discreto, onde n, m e k são inteiros.
- Sinais vetoriais são representados como um conjunto de sinais.

$$\vec{u}(x,y,t) = \begin{bmatrix} r(x,y,t) \\ g(x,y,t) \\ b(x,y,t) \end{bmatrix} \qquad \vec{u}[n,m,k] = \begin{bmatrix} r[n,m,k] \\ g[n,m,k] \\ b[n,m,k] \end{bmatrix}$$

Operações Básicas com Sinais

- Inicialmente, iremos focar nas operações básicas realizadas no domínio do tempo.
- As operações apresentadas a seguir são válidas para sinais contínuos. O equivalente para sinais discretos será apresentado no Capítulo 2.

a) Escalonamento: consiste em multiplicar o sinal por uma constante.

Exemplo: $y(t)=a \cdot x(t)$

b) Atraso: gera uma réplica deslocada temporalmente do sinal original.

Exemplo: $y(t)=x(t-T)$

Note que se T for negativo, então o processo consiste em um avanço temporal.

Operações Básicas com Sinais

c) Soma: consiste em somar dois sinais distintos.

Exemplo: w(t)=x(t)+y(t)

Esta operação pode ser combinada com o escalonamento para gerar um sinal que seja a combinação linear de outros sinais.

$$g(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cos(\omega_i) + b_i \sin(\omega_i)$$

d) Produto: consiste em obter um novo sinal a partir do produto de dois sinais conhecidos.

Exemplo: w(t)=x(t)·y(t)

Dica importante: o restante do capítulo 1 traz aplicações importantes sobre processamento digital de sinais. A leitura das demais sessões deste capítulo é recomendada.

Capítulo 2 – Sinais de Tempo Discreto e Sistemas no Domínio do Tempo

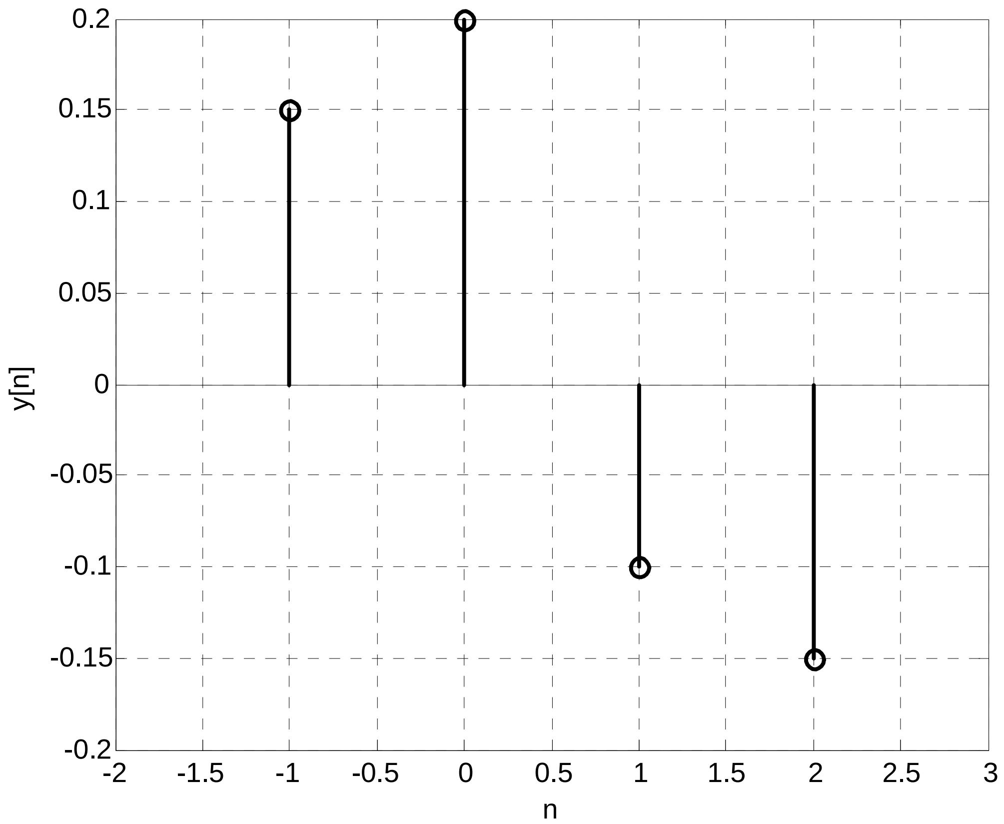
- Sinal de tempo discreto: corresponde a uma seqüência de amostras tomadas a cada T segundos. A amplitude das amostras é contínua.
- Representação no domínio do tempo: as seqüências discretas são representadas como uma seqüência de números. A representação matemática desta seqüência é dada por:

$$x[n] = [0.15,\ \underset{\uparrow}{0.20},\ -0.1,\ -0.15]$$

- A seta indica a amostra que corresponde a *n* =0. Note que a seqüência somente é definida para valores de *n* inteiros.

Representação Gráfica de Seqüências

- A representação gráfica de uma seqüência discreta é feita através de impulsos localizados em valores de n inteiros, cuja área é igual à amplitude da amostra.



Princípios da Amostragem

- Em muitas aplicações as seqüências discretas são obtidas a parir de sinais contínuos.

$$x[n] = x_a(t)\big|_{t=nT} = x_a(nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t) \cdot \delta(t - nT)$$

- O parâmetro T define o espaçamento temporal entre as amostras e é chamado de tempo de amostragem.
- O inverso deste parâmetro é denominado de freqüência de amostragem.

$$f_T = \frac{1}{T}$$

- Conforme será visto no capítulo 5, a amostragem de um sinal contínuo com largura de faixa limitada não introduz distorções, desde que a freqüência de amostragem seja maior do que duas vezes a maior freqüência que compõe o sinal.

Classificação de Seqüências Discretas

- Classificação quanto á natureza das amostras.

  - Seqüências reais: todas as amostras são reais.

  - Seqüências complexas: uma ou mais amostras são complexas.

  Seqüências complexas podem ser representadas como a soma vetorial de duas seqüências reais:

$$x[n] = x_r[n]+j\, x_i[n]$$

  Operações complexas podem ser realizadas nesta representação. Exemplo: o complexo conjugado de x[n] é:

$$x^*[n]= x_r[n]-j\, x_i[n]$$

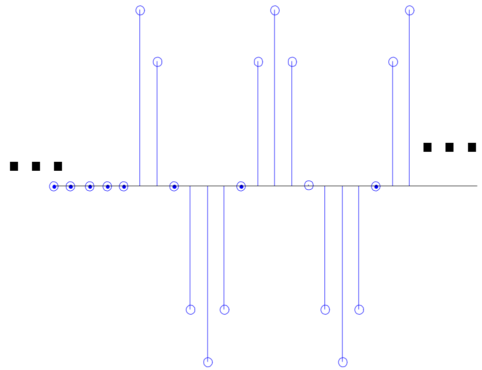
Classificação de Seqüências Discretas

- Seqüências digitais: são aquelas cujas amplitudes somente podem assumir um número finito de valores. Quantização é o processo pelo qual uma seqüência discreta torna-se uma seqüência digital. A seqüência digital é expressa por $\hat{x}[n]$.

- Classificação quanto ao comprimento

  - Seqüências infinitas: são aquelas que possuem um número infinito de amostras. Elas são sub-classificadas como:

    - Seqüências direitas: são aquelas que possuem apenas amostras nulas para $n<N_1$ ($x[n]=0$ para $n<N_1$). Se N_1 for um número positivo, então esta seqüência é chamada de causal.

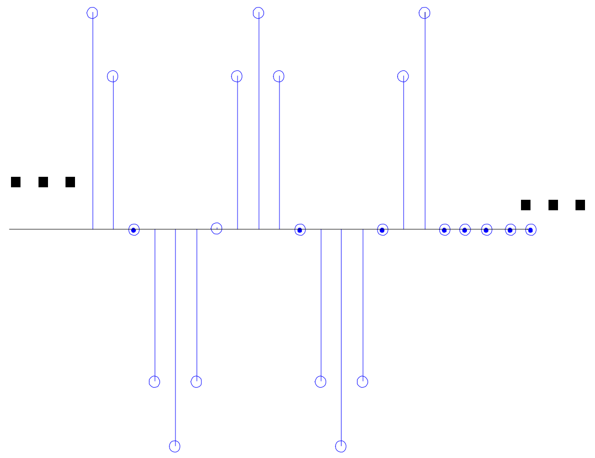


Classificação de Seqüências Discretas

- Classificação quanto ao comprimento

  - Seqüências infinitas:

    - Seqüências esquerdas: são aquelas que possuem apenas amostras nulas para $n>N_2$ ($x[n]=0$ para $n>N_2$). Se N_2 for um número positivo, então esta seqüência é chamada de anti-causal.



    - Seqüência esquerda-direita: são aquelas cujo valor das amostras está definido para todos os valores de *n*.

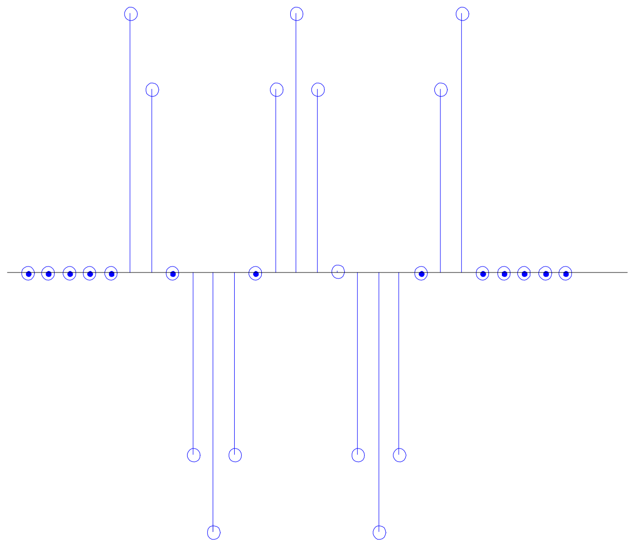
Classificação de Seqüências Discretas

- Classificação quanto ao comprimento

  - Seqüências finitas: são aquelas cujas amplitudes das amostras somente estão definidas no intervalo $[N_1,N_2]$, ou seja, x[n] somente está definida no intervalo $N_1 \leq n \leq N_2$. A duração de uma seqüência finita é dada por:

$$N=N_2-N_1+1$$

  Seqüências finitas podem ser expressas como sendo seqüências infinitas introduzindo-se zeros no intervalo fora de $[N_1,N_2]$. Esse processo é denominado de "zero-padding".

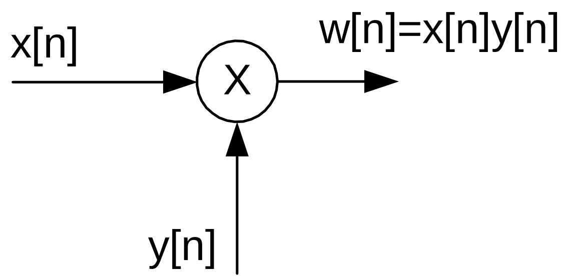


Operações com Seqüências

a) Produto ou Modulação: considere duas seqüência de mesmo comprimento. O produto entre essas seqüências é dado por:

$$w_1[n]=x[n]\cdot y[n]=\{x[N_1]\ y[N_1],\ \ldots\ ,\ x[-1]\ y[-1],\ x[0]\ y[0],\ \ldots\ ,\ x[N_2]\ y[N_2]\}$$

O esquemático para representar esta operação é dado por:



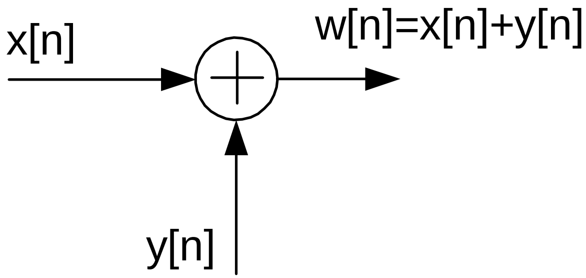
Janelamento: processo pelo qual uma seqüência infinita é transformada em uma seqüência finita através da multiplicação por uma seqüência de comprimento N, denominada de janela.

Operações com Seqüências

b) Adição: considere duas seqüência de mesmo comprimento. A soma entre essas seqüências é dada por:

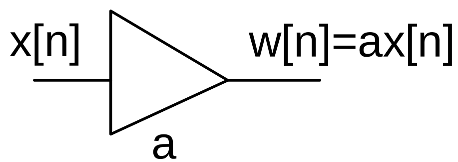
$$w_2[n]=x[n]+y[n]=\{x[N_1]+y[N_1], \ldots , x[1]+y[1], x[2]+y[2], \ldots , x[N_2]+y[N_2]\}$$

O esquemático para representar esta operação é dado por:



c) Escalonamento: sendo uma seqüência x[n], seu escalonamento é dado por:

$$w3[n]=a\cdot x[n]=\{a\cdot x[N_1], \ldots , a\cdot x[1], a\cdot x[2], \ldots , a\cdot x[N_2]\}$$



Operações com Seqüências

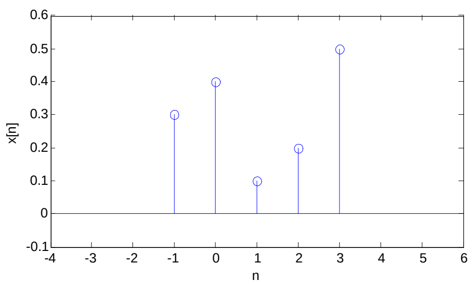
d) Deslocamento temporal: seja uma seqüência x[n]. O deslocamento temporal desta seqüência é dado por:

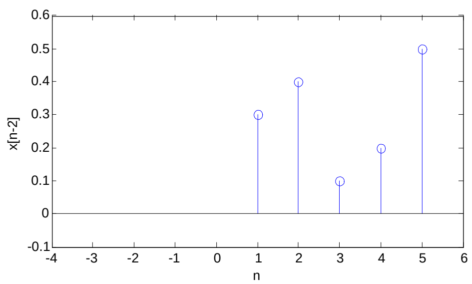
$$w_4[n]=x[n-N]$$

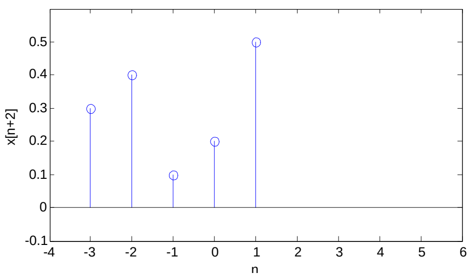
Exemplo: x[n]={0.3, 0.4, 0.1, 0.2, 0.5}

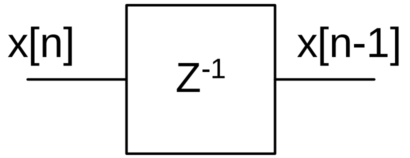
a) N=2 → w[n]=x[n-2]= {0, 0.3, 0.4, 0.1, 0.2, 0.5}

b) N=-2 → w[n]=x[n+2]={0.3, 0.4, 0.1, 0.2, 0.5}

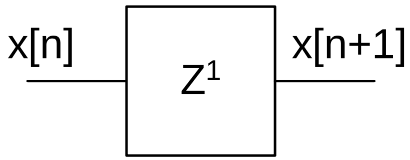








Atrasador



Adiantador

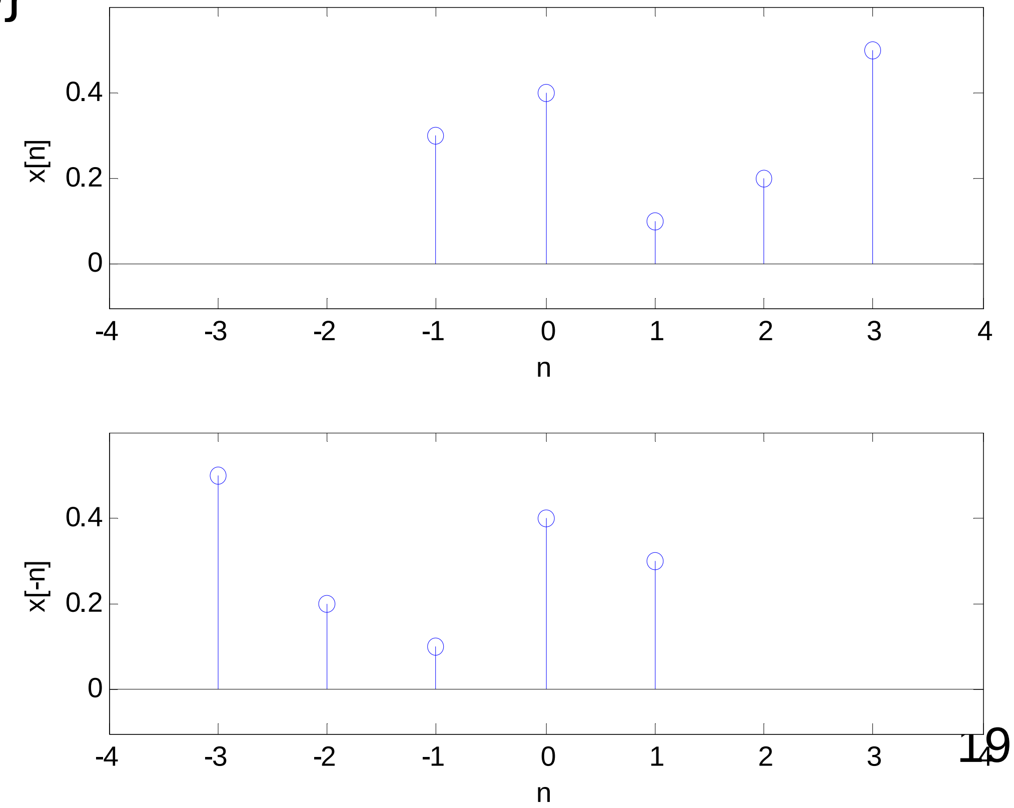
Operações com Seqüências

e) Inversão temporal: consiste em inverter a seqüência ao longo do eixo das amostras.

$$w_5[n]=x[-n]$$

Exemplo: $x[n]=\{0.3, \underset{\uparrow}{0.4}, 0.1, 0.2, 0.5\}$

$w[n]=x[-n]=\{0.5, 0.2, 0.1, \underset{\uparrow}{0.4}, 0.3\}$



Operações com Seqüências

f) Alteração na taxa de amostragem: esta operação permite criar uma nova seqüência cuja freqüência de amostragem é maior (sobre-amostragem) ou menor (sub-amostragem) do que a freqüência de amostragem da seqüência original.

- A razão de alteração da freqüência de amostragem é dada por

$$R=f_T'/f_T$$

- Para R>1 o processo é chamado de interpolação.

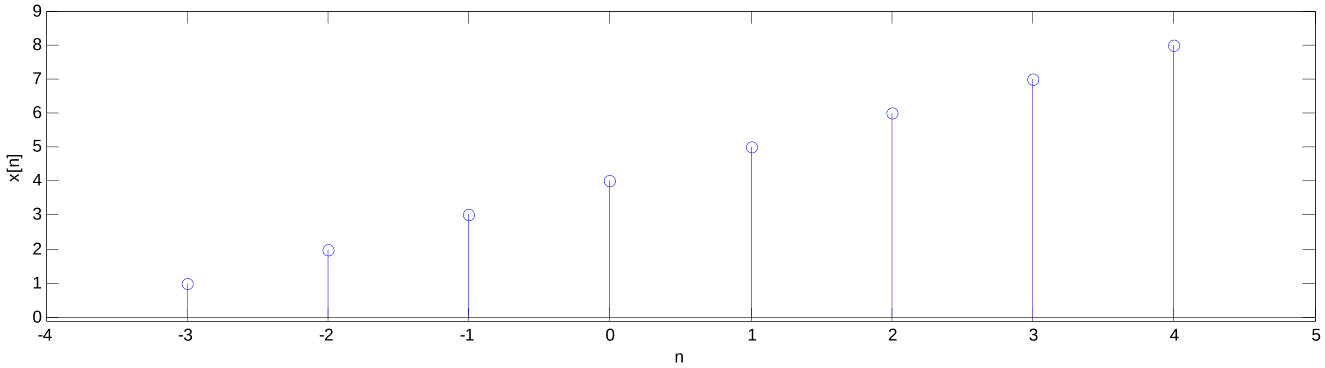
- Para R<1 o processo é chamado de dizimação.

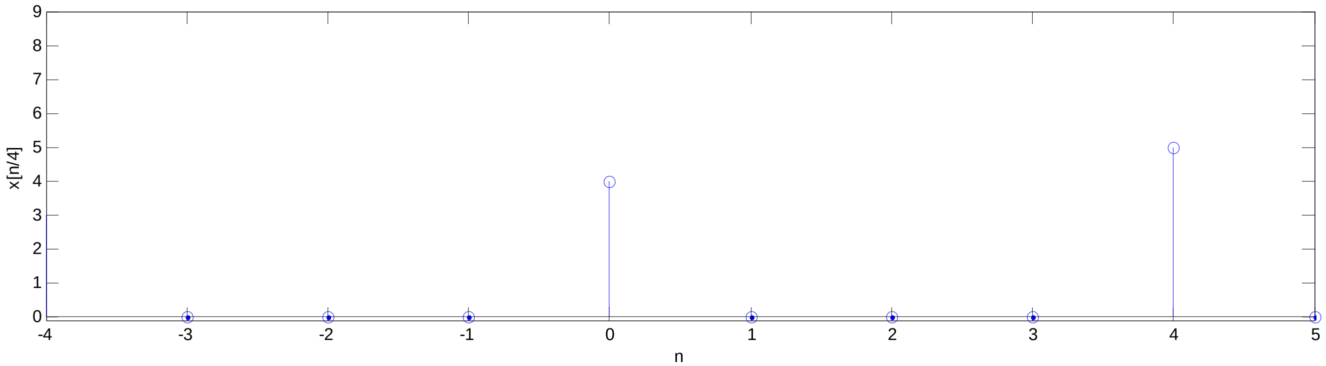
- A sobre-amostragem por um fator inteiro L gera uma nova seqüência onde L-1 amostras nulas são inseridas entre duas amostras da seqüência original, ou seja,

$$y[n]=\begin{cases} x\left[\dfrac{n}{L}\right] & , n=0,\pm L,\pm 2L,\ldots \\ 0 & ,\text{caso contrário} \end{cases}$$

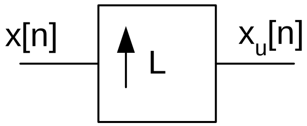
Operações com Seqüências

- Exemplo de interpolação com L=4.





- Esquemático do interpolador



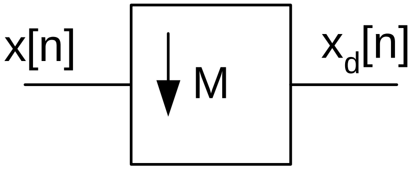
Operações com Seqüências

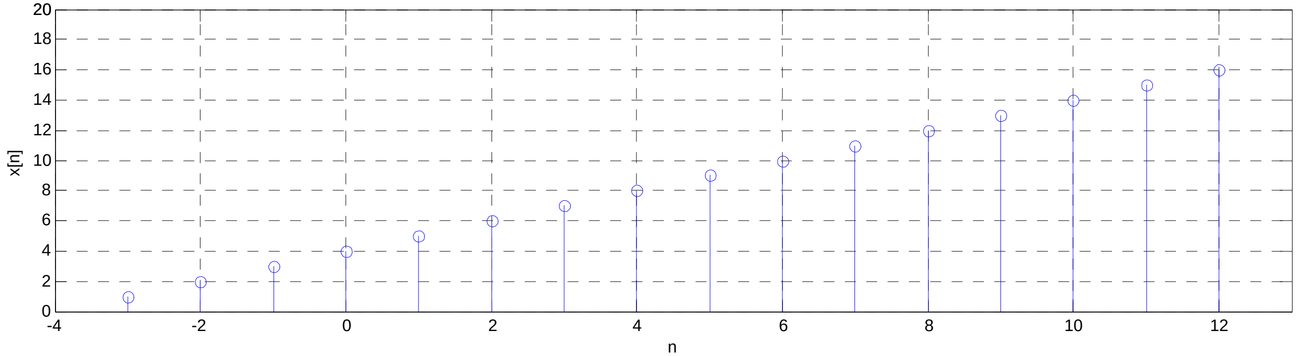
- A dizimação por um fator M gera uma nova seqüência onde M-1 amostras são removidas entre duas amostras que são mantidas. Logo, $y[n] = x[M \cdot n]$

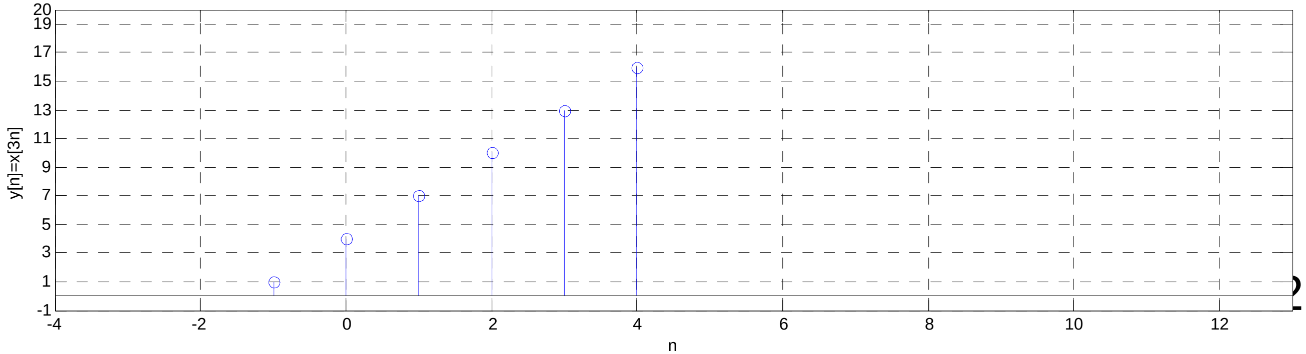
- A seqüência y[n] possui uma freqüência de amostragem M vezes menor do que a seqüência.

- Exemplo: dizimação por M=3.

Esquemático do dizimador:







Cuidados com as Operações com Seqüências

- O número de amostras das seqüências não é o único parâmetro que deve ser observado ao realizar uma operação com seqüências.
- A posição da amostra correspondente à n=0 também influencia no resultado da operação.

Exemplo: Seja

$$x[n]=\{\underset{\uparrow}{0}, 2, 4, 6\} \text{ e } y[n]=\{\underset{\uparrow}{1}, 3, 5, 7\}$$

a) Encontre $w_1[n]=x[n]y[n]$

b) Encontre $w_2[n]=x[n]+y[n]$

Refaça os itens a e b considerando agora as seqüências abaixo

$$x[n]=\{0, \underset{\uparrow}{2}, 4, 6\} \text{ e } y[n]=\{\underset{\uparrow}{1}, 3, 5, 7\}$$

Exercícios Propostos

- Desenvolva um algoritmo no Matlab que permita:

  a) entrar com duas seqüências de comprimento qualquer.

  b) definir qual amostra da seqüência corresponde à n=0.

  c) realizar o produto das duas seqüências.

  d) realizar a soma das duas seqüências.

  e) traçar as seqüências de entrada e os resultados em gráficos distintos.

- Seja $x[n]=\{-2, -1, \underset{\uparrow}{0}, 1, 2\}$ e $y[n]=[\underset{\uparrow}{1}\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]$

  Encontre:

  a) $w_1[n]=3x[n]-2y[n]$

  b) $w_2[n]=x[n]-y[-n]$

  c) $w_3[n]=y[n]\cdot y[-n]$

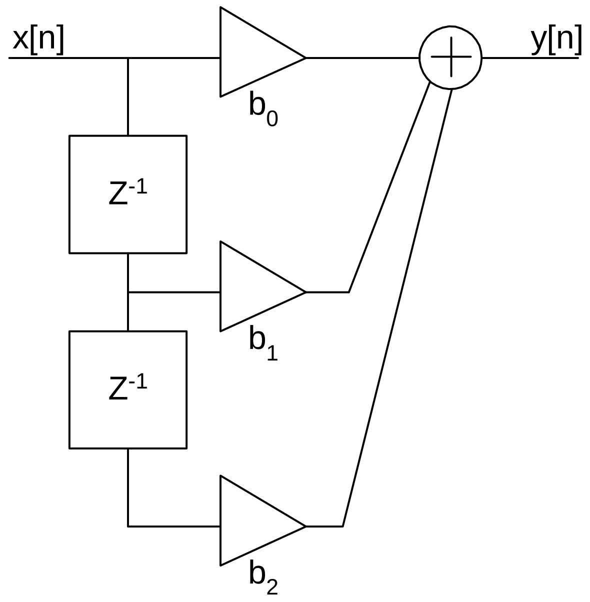
  d) $w_4[n]=2x[n]-x[n-1]+3y[n-4]$

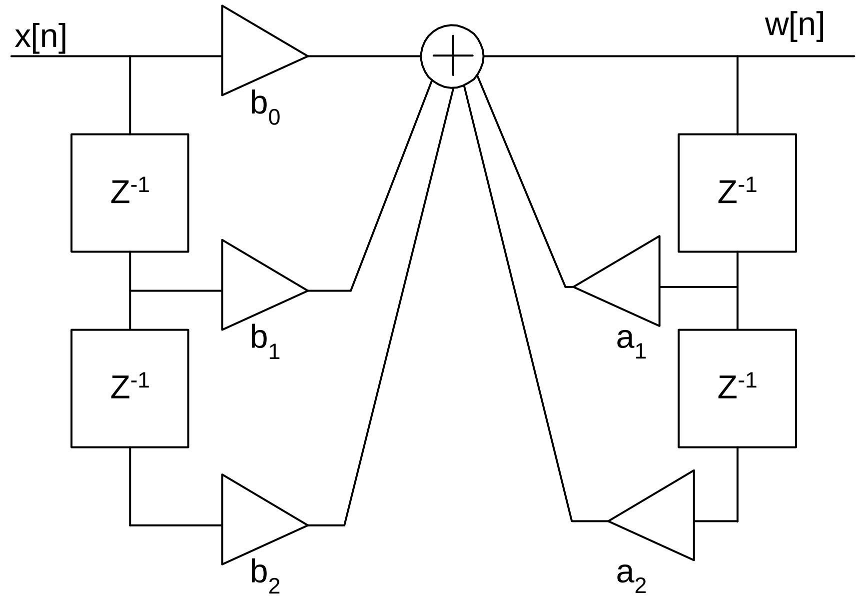
  e) $w_5[n]=\sum_{i=0}^{2}\left\{(i+1)x[n-1]+\frac{1}{i+1}y[n+i]\right\}$

Representação Esquemática

- As operações com seqüências podem ser representadas na forma esquemática.

  Exemplo: encontre a expressão para obter y[n] e w[n].





Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à simetria:

  - Seqüência conjugada simétrica: uma seqüência é considerada conjugada simétrica se:

$$x[n]=x^*[-n]$$

  Uma seqüência conjugada simétrica real é também denominada de seqüência par.

  - Seqüência conjugada anti-simétrica: uma seqüência é considerada conjugada anti-simétrica se:

$$x[n]=-x^*[-n]$$

  Uma seqüência conjugada anti-simétrica real é também denominada de seqüência ímpar. Se x[n] é conjugada anti-simétrica, então x[0] é puramente imaginária.

  Logo, se x[n] for ímpar, então x[0]=0.

Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à simetria:

  - Toda seqüência complexa x[n] possui uma componente complexa simétrica e uma componente complexa anti-simétrica, definidas como:

$$x_{cs}[n] = \frac{1}{2}\left\{x[n] + x^{*}[-n]\right\}$$

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2}\left\{x[n] - x^{*}[-n]\right\}$$

  - Exercício: prove que $x_{cs}[n]$ atende a condição de simetria e que $x_{ca}[n]$ atende a condição de anti-simetria.

  - A seqüência original pode ser obtida através de uma combinação linear de $x_{cs}[n]$ e $x_{ca}[n]$:

$$x[n] = x_{cs}[n] + x_{ca}[n]$$

Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à simetria:

  - Seqüências reais podem ser representadas pela combinação linear de suas componentes pares e ímpares, definidas como:

$$x_{ev}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\}$$

$$x_{od}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\} \qquad x[n] = x_{ev}[n] + x_{od}[n]$$

  - Seqüências finitas entre [0, *N*-1] podem ser representadas pela sua componente conjugada simétrica periódica e pela sua componente conjugada anti-simétrica periódica. Note que estas seqüências apenas existem para os valores de *n* definidos para *x*[*n*].

$$x_{pcs}[n] = \frac{1}{2}\left\{x[n] + x^*\left[\langle -n \rangle_N\right]\right\} = \left\{x[n] + x^*\left[(N-1) - n\right]\right\},\ 0 \le n \le N\text{-}1$$

$$x_{pca}[n] = \frac{1}{2}\left\{x[n] - x^*\left[\langle -n \rangle_N\right]\right\} = \left\{x[n] - x^*\left[(N-1) - n\right]\right\},\ 0 \le n \le N\text{-}1$$

$$x[n] = x_{pcs}[n] + x_{pca}[n] \qquad \langle k \rangle_N = k \text{ modulo } N$$

Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à simetria:

  - Seqüências conjugadas simétricas periódicas: são aquelas limitadas a $0 \leq n \leq N-1$ que atendem a seguinte condição:

$$x[n]=x^*[N-n]$$

  - Seqüências conjugadas anti-simétricas periódicas: são aquelas limitadas a $0 \leq n \leq N-1$ que atendem a seguinte condição:

$$x[n]=-x^*[N-n]$$

- Exemplos no quadro!

Outras Classificações para Seqüências

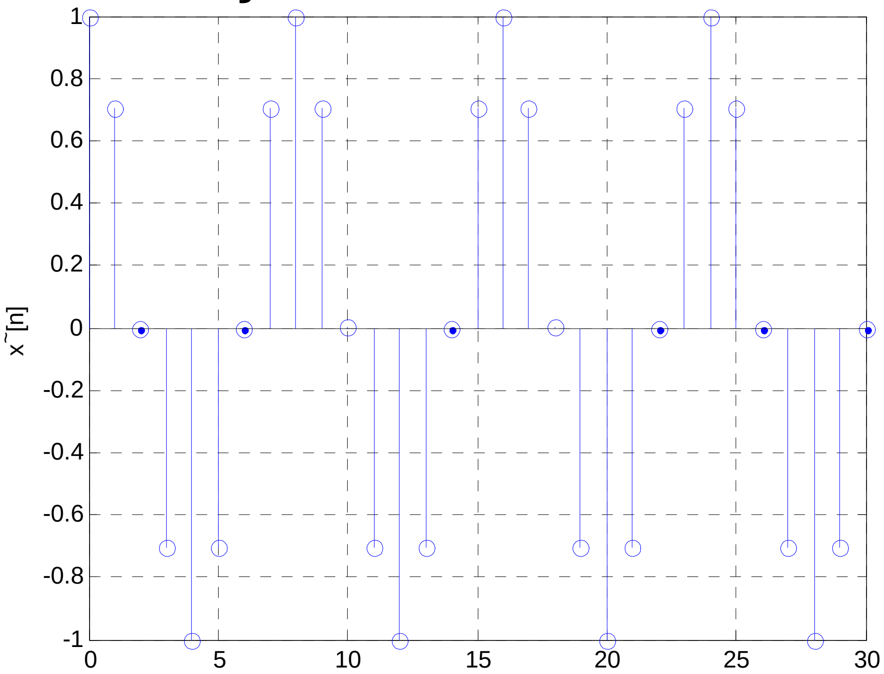
- Classificação quanto à periodicidade

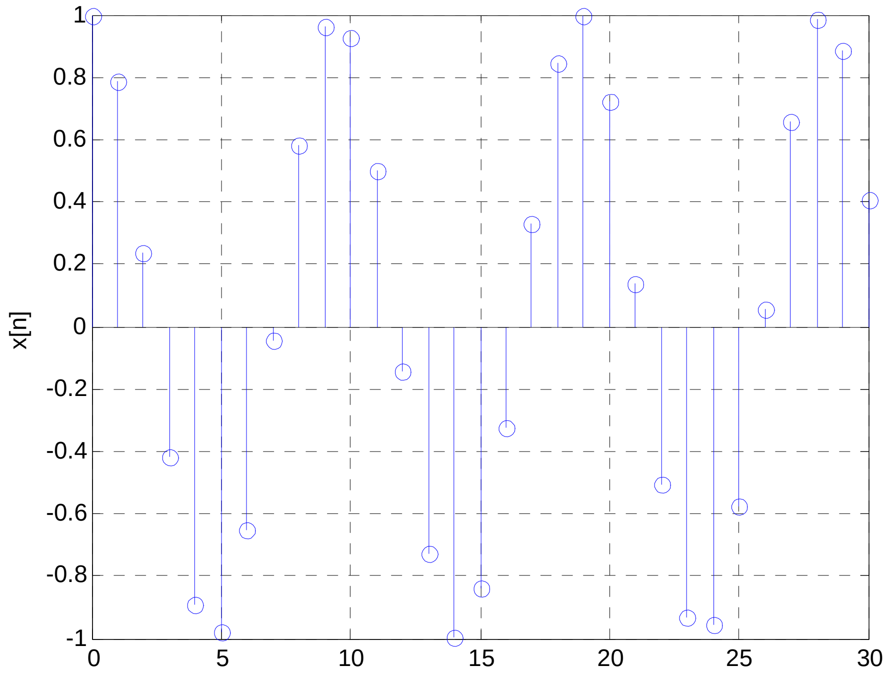
- Seqüências periódicas: são aquelas que se repetem a cada deslocamento de *N* amostras, ou seja:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n - kN]$$

onde N é um inteiro positivo e k é um inteiro.

- Seqüências aperiódicas são todas aquelas que não atendem a condição acima.





Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à energia e à potência

  - Definição de energia de uma seqüência:

$$\varepsilon_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x[n] \right|^2$$

  - Definição de potência média de uma seqüência:

$$P_x = \lim_{K \to \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} \left| x[n] \right|^2 \quad \text{para seqüência aperiódica}$$

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| x[n] \right|^2 \quad \text{para seqüência periódica}$$

  - Sinais potência: são aqueles que possuem energia infinita, mas potência média finita.

  - Sinais energia: são aqueles que possuem energia média finita e potência média nula.

Outras Classificações para Seqüências

- Exercício: classifique as seqüências abaixo quanto à energia e potência.

a) $x[n] = e^{-n/5}$ $n=\{0, 1, 2, 3, ...\}$

b) $x[n] = \mathrm{sen}(\pi/4 \cdot n)$ $n=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

c) $x[n]=1/n$ $n=\{1, 2, 3, ...\}$

d) $x[n] = \tan(\pi/2 \cdot n)$ $n=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

e) $x[n] = \cos(\pi \cdot n)$ $n=\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

f) $x[n] = (-1)^n$ $n=\{0, 1, 2, 3, ...\}$

Outras Classificações para Seqüências

- Classificação quanto à limitação da amplitude das amostras

  - Seqüências limitadas são aquelas que atendem a seguinte condição:

  $$|x[n]| \leq B < \infty \text{ para qualquer } n$$

- Classificação quanto à somatória.

  - Seqüências absolutamente somáveis são aquelas que atendem a seguinte condição:

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

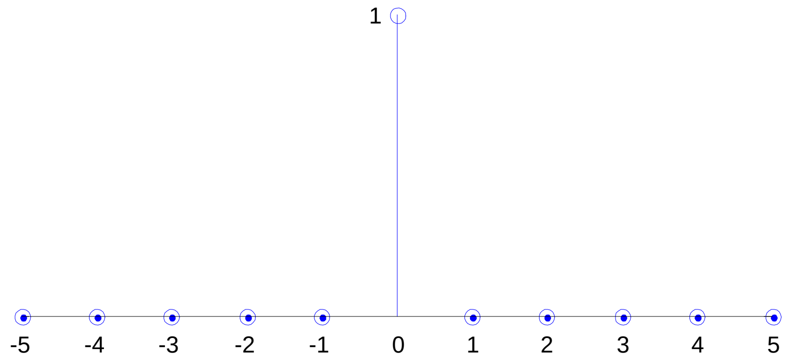
  - Seqüências quadráticas-somáveis são aquelas que atendem a seguinte condição:

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Seqüências Fundamentais

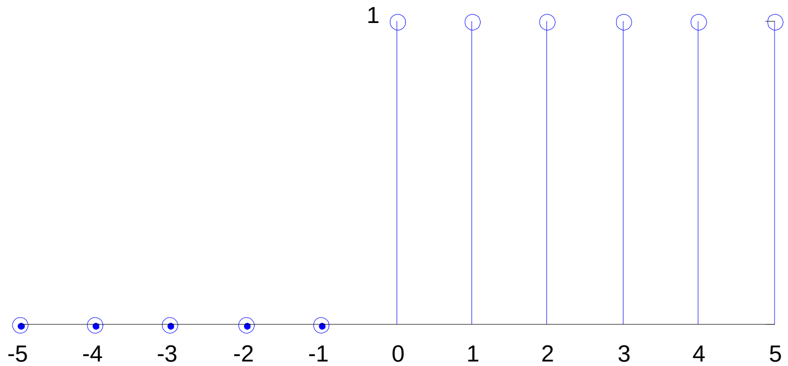
- Seqüência Impulso Unitário: esta seqüência é útil para caracterizar sistemas de tempo discreto. Sua definição é:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



- Seqüência Degrau Unitário: esta seqüência é definida por

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- Note que:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Seqüências Fundamentais

- Seqüência Senoidal: esta seqüência é dada por:

$$x[n]=A\cdot sen(\omega_0 n+\phi) \quad \text{para } -\infty<n<\infty$$

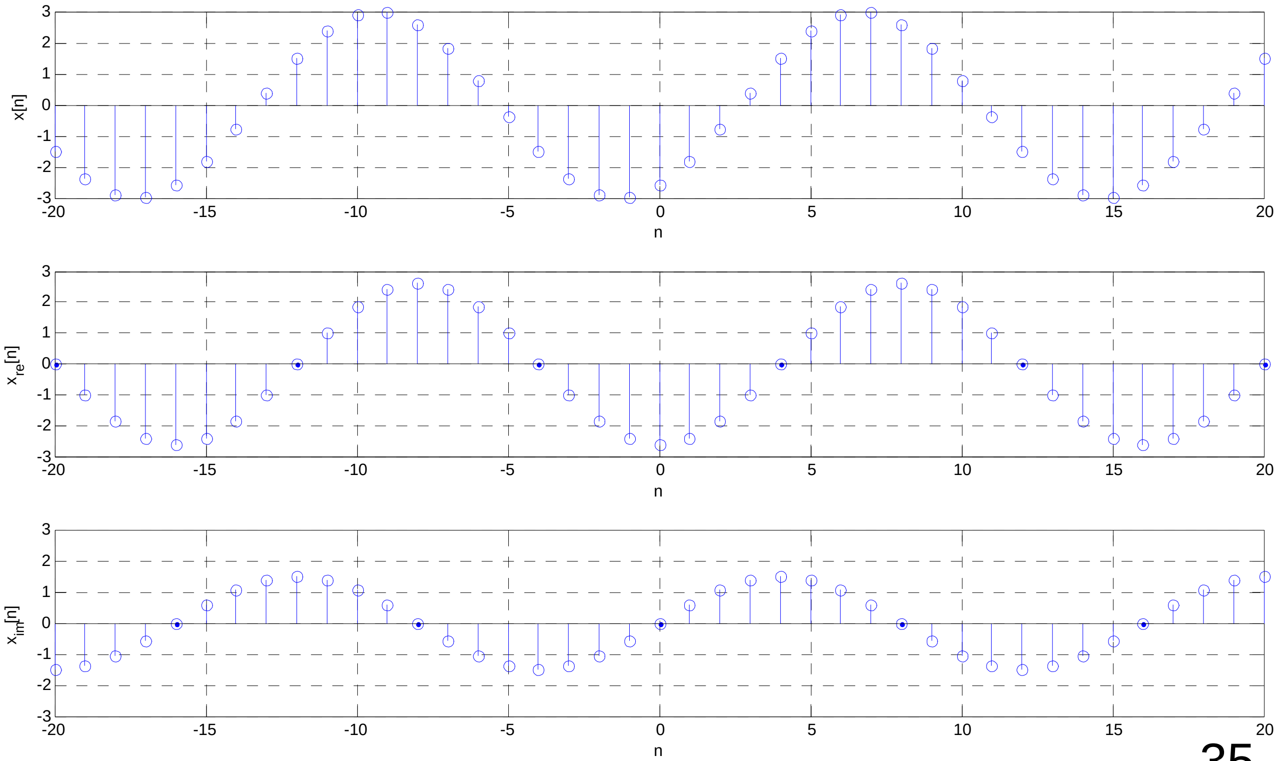
- A seqüência senoidal também pode ser expressa como:

$$x[n]=x_{re}[n]+x_{im}[n]$$

onde

$x_i[n]=A\cdot sen(\phi)cos(\omega_0 n)$

$x_q[n]=A\cdot cos(\phi)sen(\omega_0 n)$



Seqüências Fundamentais

- Periodicidade de seqüências senoidais:

  - Período fundamental: se $N \cdot \omega_0 = 2\pi r$,onde r é um inteiro então a senóide discreta irá se repetir a cada N amostras. N é o período fundamental da seqüência.

  - Se $2\pi/\omega_0$ for um número racional, então o período da seqüência será múltiplo de $2\pi/\omega_0$. O período da seqüência será igual à $2\pi k/\omega_0$, quando está divisão for um número inteiro. k deve ser um inteiro.

  - Se $2\pi/\omega_0$ for um número irracional, então a seqüência será aperiódica.

Seqüências Fundamentais

- Propriedades interessantes de senóides discretas:

  - A freqüência angular é dada em radianos ou radianos/amostra

  - Se $\omega_1=\omega_2+2\pi k$, então $\text{sen}(\omega_1)=\text{sen}(\omega_2)$

  - A maior freqüência que uma seqüência senoidal pode apresentar é $\pm \pi$. Logo,

  $$\cos(\alpha\pi n)=\cos[(2-\alpha)\pi n]$$

  As freqüências em torno de $\pm 2\pi k$ são denominadas de freqüências baixas.

  As freqüências em torno de $\pm (2k+1)\pi$ são denominadas de freqüências altas.

Seqüências Fundamentais

- Seqüências Exponenciais: são seqüências expressas na forma

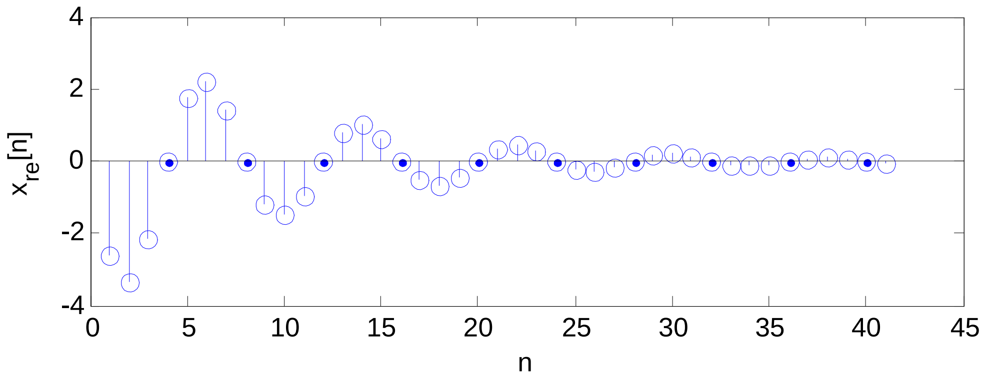
$$x[n] = A\alpha^{k \cdot n}$$

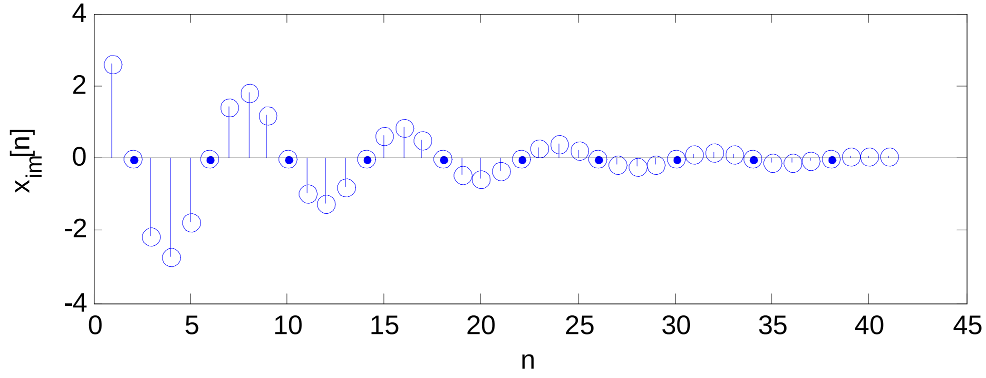
onde A e α podem ser números reais ou complexos e k é um número real.

- Fazendo-se $A=|A|e^{j\theta}$ e $\alpha=\exp(\sigma_0+j\omega_0)$, então tem-se:

$$x[n]=A\exp[(\sigma_0+j\omega_0)n] = |A|\exp(j\theta)\exp[(\sigma_0+j\omega_0)n]$$

$$x[n]=|A|\exp(\sigma_0 n)\cos(\omega_0 n+\theta)+j|A|\exp(\sigma_0 n)\mathrm{sen}(\omega_0 n+\theta)$$





Processo de Amostragem

- Processo pelo qual uma seqüência discreta é formada a partir de um sinal contínuo.

$$x[n]= x_a(t_n)=x_a(nT)$$

- Portanto, as amostras somente serão definidas para os instantes

$$t_n=nT=n/F_T=2\pi n/\Omega_T$$

onde T é o tempo entre as amostras, F_T é a freqüência de amostragem e $\Omega_T= 2\pi F_T$ é a freqüência angular de amostragem.

- Amostragem de um sinal senoidal:

$$x_a(t)=\cos(\Omega_0 t+\theta)\text{, portanto}$$

$$x[n]=\cos(\Omega_0 nT+\theta) = \cos(2\pi\Omega_0 n/\Omega_T+\theta) = \cos(\omega_0 n+\theta)$$

onde $\omega_0= 2\pi\Omega_0/\Omega_T= \omega_0$ é a freqüência angular digital do sinal, dada em radianos ou radianos/amostra.

Alising

- Alising é o fenômeno que ocorre quando há ambigüidade na representação por seqüência discreta de dois ou mais sinais contínuos.
- Exemplo no Quadro!
- Todos os sinais contínuos das seguintes famílias:

$$x(t) = \cos\left[\left(\Omega_0 + k\Omega_T\right)t + \theta\right] \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ e}$$
$$x(t) = \cos\left[\left(k\Omega_T - \Omega_0\right)t + \theta\right] \text{ para } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

são representados pela mesma seqüência discreta:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n + \theta) = \cos\left(2\pi \frac{\Omega_0}{\Omega_T} n + \theta\right)$$

- Exercício proposto: prove que a afirmação acima é verdadeira.

Alising

- Exemplo: encontre a seqüência discreta para representar o sinal:

$$x(t) = 6\cos(60\pi t) + 3\sin(300\pi t) + 2\cos(340\pi t) + 5\cos(500\pi t) + 10\sin(660\pi t)$$

  sabendo que a freqüência de amostragem é de 200Hz.

  Recupere o sinal analógico a partir da seqüência discreta.

- Refaça o exemplo anterior com uma freqüência de amostragem igual à 1kHz.

- Este exemplo deixa claro que para que não ocorra alising é necessário que as freqüências angulares da seqüência digital devem estar limitadas na faixa $0 \leq \omega \leq \pi$.

- Portanto, para que um sinal contínuo seja representado por suas amostras sem ambigüidade é necessário que

$$F_T \geq 2f_{max}$$

$$\Omega_T \geq 2\Omega_{max}$$

Sistemas de Tempo Discreto

- Sistemas de Tempo Discreto (STD) processam uma seqüência de entrada para fornecer uma seqüência de saída.

- As amostras de saída são processadas segundo o índice de tempo de entrada, *n*, ou seja, a saída é sempre seqüêncial.

- Em termos práticos, sistemas discretos sempre operam com seqüências digitais e, por isso, são comumente denominados de filtros digitais.

Sistemas de Tempo Discreto

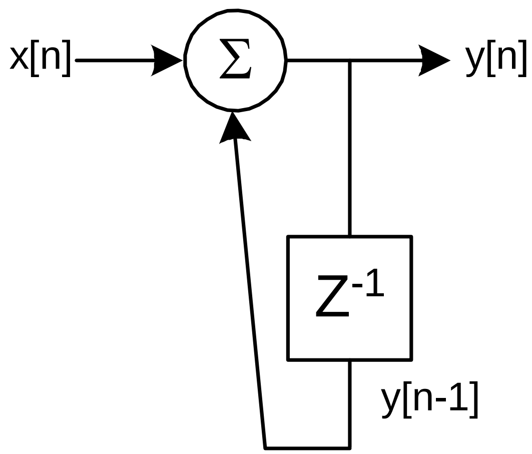
- Exemplos de Sistemas de Tempo Discreto: Acumulador.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

Para sistemas causais, y[-1] pode ser visto como um valor inicial para o acumulador. Assim, pode-se escrever que:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k] + \sum_{k=0}^{n} x[k] = y[-1] + \sum_{k=0}^{n} x[k]$$

onde o segundo termo da expressão acima é denominado de acumulador causal.



- Exercício proposto: escreva um código em MATLAB para implementar o acumulador. O programa deve permitir a entrada de qualquer seqüência discreta.

Sistemas de Tempo Discreto

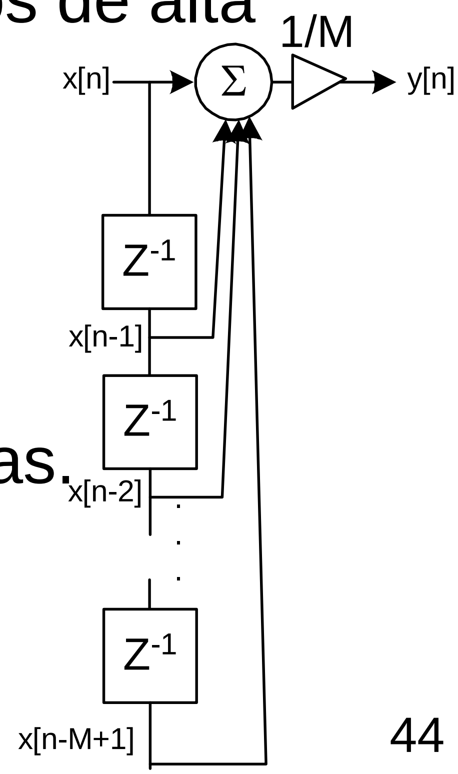
- Exemplos de Sistemas de Tempo Discreto: Média Movente.

  Este sistema realiza a média em uma janela de M amostras.

$$y[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

A média movente pode ser utilizada para filtrar sinais de baixa freqüência que estejam contaminados com ruídos de alta freqüência.

Exercício proposto: desenvolva um programa em MATLAB que permita filtrar uma seqüência qualquer utilizando média movente de M amostras.



Classificação de Sistemas de Tempo Discreto

- Sistema Linear: é aquele em que o princípio da superposição é válido, ou seja, se

$$x[n]=\alpha x_1[n]+\beta x_2[n]$$

então,

$$y[n]=\alpha y_1[n]+\beta y_2[n]$$

Assim, a resposta de um sistema linear a uma seqüência de entrada pode ser expressa como uma combinação linear da resposta de cada uma das componentes do sinal de entrada.

- Exemplo: acumulador.

Classificação de Sistemas de Tempo Discreto

- Sistema Invariante ao Deslocamento ou Invariantes no Tempo:

  - São aqueles em que o instante no qual a seqüência de entrada é aplicada não afeta o resultado da saída.

- Se y[n] é a resposta de um sistema ID ou IT à uma seqüência x[n], então a resposta para uma seqüência

  $x_1[n]=x[n-N_0]$ é simplesmente $y_1[n]=y[n-N_0]$

- Sistemas Discretos Lineares e Invariantes no Tempo (LIT): são aqueles que, ao mesmo tempo, são lineares e invariantes no tempo.

  - A maior parte dos sistemas em discussão neste curso são classificados como LIT.

  - Exercício proposto: prove que um interpolador não é um sistema invariante no tempo.

Classificação de Sistemas de Tempo Discreto

- Sistema Causal: é aquele cuja uma amostra de saída somente depende das amostras passadas e não depende das amostras futuras. Ou seja, $y[n_0]$ somente depende das amostras cujo índice é menor que n_0.
- Sistema Estável: é aquele que se a entrada for limitada em amplitude, então a saída também será. Assim, se

  $|x[n]|<B_x$, então $|y[n]|<B_y$, qualquer que seja n.

  Este tipo de estabilidade é denominado de estabilidade BIBO *(Bounded Input Bounded Output).*
- Sistema Passivo e Sistema Sem Perdas: Um sistema é passivo se a energia do sinal de saída é menor ou igual à energia do sinal de entrada. Se a igualdade for satisfeita, então o sistema é classificado como sem perdas.

  Exemplo: $y[n]=\alpha x[n-N]$ onde N>0.

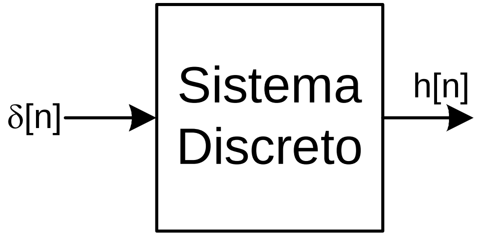
$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[n]|^2 = \alpha^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \alpha^2 E_x$$

Se $\alpha<1$, o sistema é classificado como passivo.

Se $\alpha=1$, o sistema é sem perdas.

Caracterização de Sistemas Discretos

- Reposta ao Impulso: um filtro digital LIT pode ser caracterizado pela sua resposta ao impulso, que é a seqüência que aparece na saída do filtro quando a seqüência impulso unitário é aplicada na sua entrada.



- Exemplo: encontre a resposta ao impulso do sistema discreto acumulador e sistema discreto de média movente.

- Resposta ao Degrau: um filtro LIT pode ser caracterizado pela sua reposta ao degrau unitário, que é a seqüência que aparece na saída do filtro quando o degrau unitário é aplicado na entrada.

- Exercício proposto: encontre a resposta ao degrau do sistema discreto acumulador e sistema discreto de média movente.

Caracterização de Sistemas Discretos

- Uma seqüência pode ser representada por uma soma ponderada de funções impulso:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k]$$

- Assim, um sistema LIT (onde o princípio da superposição é válido) pode ter a saída expressa como sendo uma combinação linear das respostas ao impulsos ponderadas e deslocadas ao longo do tempo.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

- A expressão acima pode ser reescrita na forma

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k] \cdot h[k]$$

que é conhecida como convolução discreta. Logo

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Caracterização de Sistemas Discretos

- Exercícios propostos:

  1) Prove que a convolução discreta atende as seguintes propriedades:

  a) Associação

  b) Distribuição

  c) Comutação

  2) Encontre a seqüência de saída para os seguintes casos:

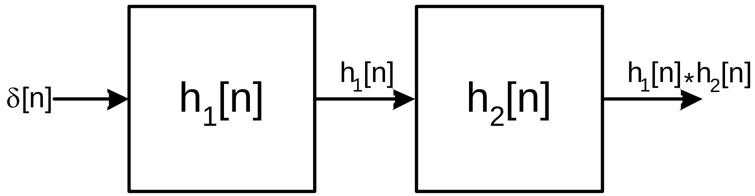
  a) x[n]=[2 4 -1 0 1 -2] e h[n]=[3 2 1]

  b) x[n]=exp(-0.1n) para -1<n<5 e h[n]=1 para -1<n<4

  c) x[n]=cos(0.2πn) para -5<n<5 e h[n]=[-0.6 0.3 0 0.3 0.6]

Interconexões de Sistemas LIT

- Conexão em Cascata: ocorre quando a saída de um sistema é conectado na entrada de outro sistema.



  - A resposta ao impulso do sistema como um todo é dada pela convolução entre as respostas ao impulso dos sistemas individuais.

  - A conexão em cascata de dois sistemas estáveis BIBO resulta em um sistema estável BIBO e a conexão em cascata de dois sistemas passivos (ou sem-perdas) resulta em um sistema passivo (sem-perdas).

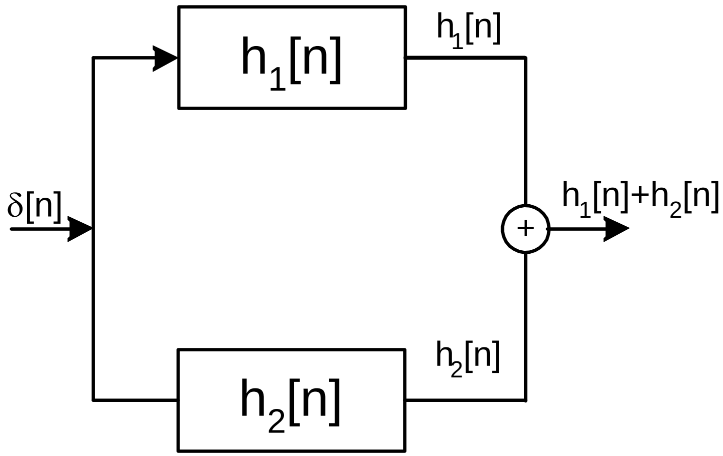
- Sistemas inversos: dois sistemas são ditos inversos se:

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n]$$

- Exemplo no quadro: encontre o sistema inverso de um acumulador.

Interconexões de Sistemas LIT

- Conexão Paralela: se dois sistemas recebem a mesma seqüência de entrada e as saídas destes sistemas são somadas para se obter uma única saída, então estes sistemas estão ligados em conexão paralela.

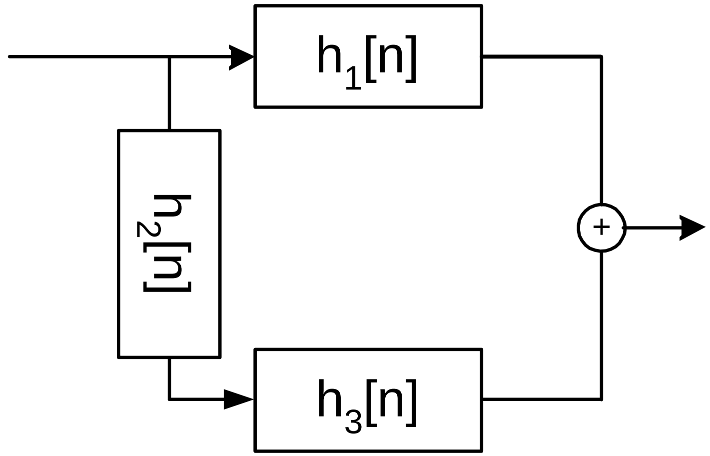


- Exercício proposto: prove que dois sistemas estáveis em paralelo resulta também em um sistema estável.

- Exercício proposto: prove que dois sistemas passivos ou sem-perdas em paralelo pode não resultar em um sistema passivo ou sem-perda.

Interconexões de Sistemas LIT

- Exemplo: encontre a resposta ao impulso do sistema abaixo.



$$h_1[n] = 2\delta[n] - 0.52\delta[n-2]$$
$$h_2[n] = -\delta[n] + 0.1\delta[n-1]$$
$$h_3[n] = \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Classificação em termos da Resposta ao Impulso

- Um sistema BIBO estável deve ter resposta ao impulso que atenda a seguinte condição:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| h[n] \right| = S < \infty$$

- Para que um sistema seja causal, é necessário que a sua resposta ao impulso seja causal, ou seja:

$$h[n]=0 \text{ para } n<0$$

- Prova no quadro!

Sistemas LTI com Dimensão Finita

- Considere um sistema LIT caracterizado pela seguinte equação diferença:

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k]$$

  onde $x[n]$ é a entrada, $y[n]$ é a saída, p_k e d_k são coeficientes constantes. A ordem deste sistema. A ordem deste sistema é

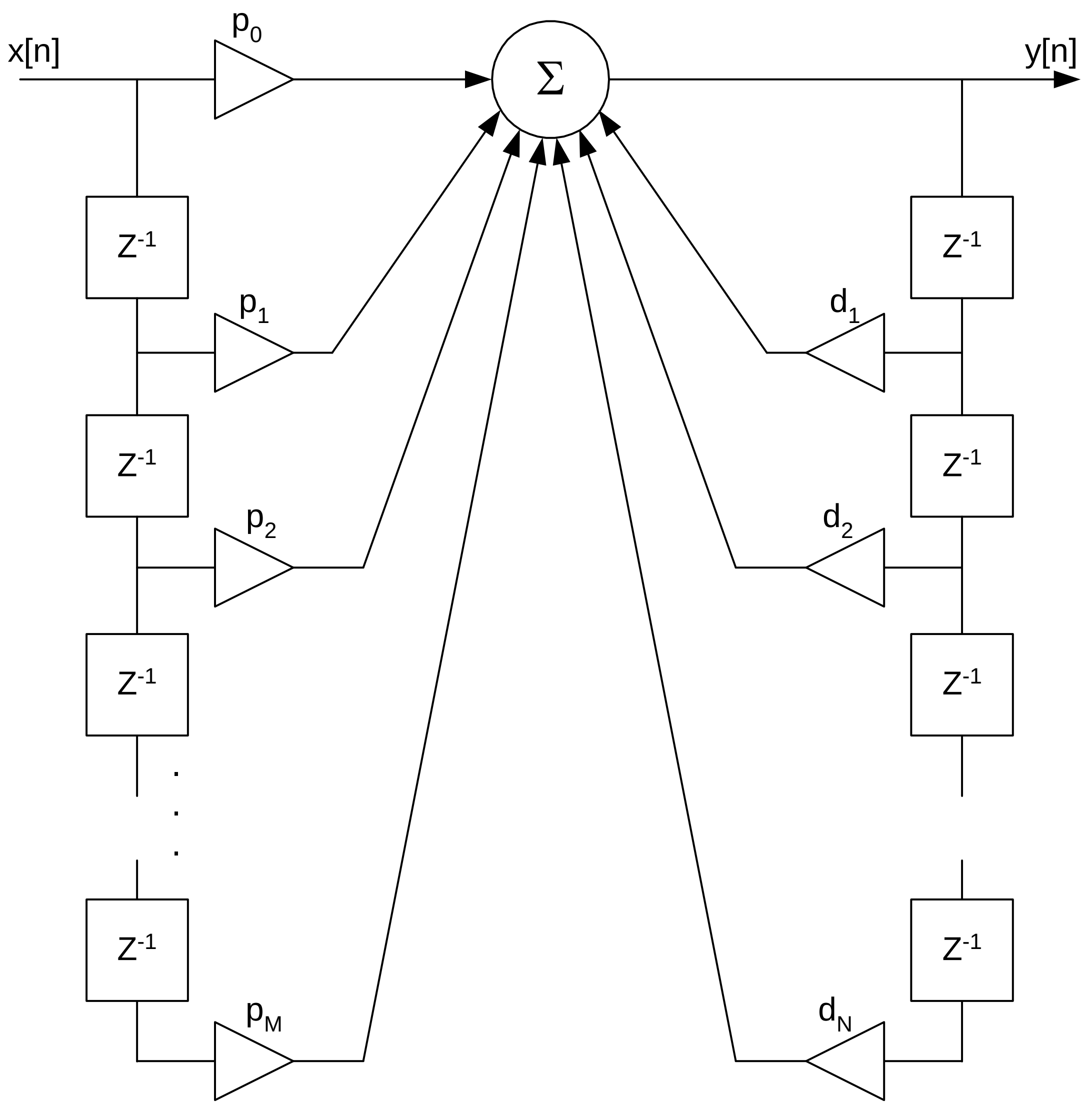
$$L = \max(N, M)$$

- Como a soma dos elementos de entrada e saída é finita, pode-se implementar este sistema na prática, mesmo que em geral a resposta ao impulso seja infinita. A saída deste sistema é dada por:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{p_k}{d_0} x[n-k]$$

Sistemas LTI com Dimensão Finita

- Esquemático de um sistema LTI com dimensão finita:



Sistemas LTI com Dimensão Finita

- A solução para a equação diferença para determinar y[n] é similar à solução da equação diferencial de um sistema contínuo, onde a solução é a soma de um termo particular ($y_p[n]$) e de um termo homogêneo ($y_c[n]$).

$$y[n]=y_c[n]+y_p[n]$$

- Solução homogênea: é obtida quando x[n]=0, ou seja

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = 0$$

A solução desta equação pode ser obtida assumindo que

$$y_c[n]=\lambda^n$$

Então, pode-se escrever que

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} d_k \lambda^{n-k} = \lambda^{n-N}\left(d_0\lambda^N + d_1\lambda^{N-1} + d_2\lambda^{N-1} + \cdots + d_{N-1}\lambda + d_N\right)$$

que é a equação polinomial característica do sistema discreto, onde λ_n é a *n*-ésima raíz do polinômio, o que significa que a solução homogênea é da forma:

$$y_c[n] = \alpha_1\lambda_1{}^n + \alpha_2\lambda_2{}^n + \cdots + \alpha_{N-1}\lambda_{N-1}{}^n + \alpha_N\lambda_N{}^n$$

onde α_i são constantes que dependem das condições iniciais.

Sistemas LTI com Dimensão Finita

- Quando a equação polinomial possui raízes iguais, $y_c[n]$ assume a forma:

$$y_c[n] = \alpha_1 \lambda_1{}^n + \alpha_2 n \lambda_1{}^n + \alpha_3 n^2 \lambda_1{}^n + \cdots + \alpha_L n^{L-1} \lambda_1{}^n + \alpha_{L+1} \lambda_2{}^n + \cdots + \alpha_N \lambda_{N-L}{}^n$$

- Para determinar a solução particular, assume-se que $y_p[n]$ possui a mesma forma que x[n].

- Exemplo: encontre a solução completa para um sistema caracterizado pela seguinte equação diferença:

$$y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=8u[n]$$

sabendo que y[-2]=-1 e y[-1]=1.

Zero-Input e Zero-State Responses

- Outra maneira de obter a solução para a equação diferença é calcular a Zero-Input response ($y_{zi}[n]$) e Zero-State response ($y_{zs}[n]$).
- $y_{zi}[n]$ é obtida resolvendo-se a equação polinomial característica para $x[n]=0$.
- $y_{zs}[n]$ é obtida resolvendo-se a equação polinomial característica para a entrada específica e fazendo todas as condições iniciais serem nulas.

- Exemplo: utilize o método descrito acima para encontrar a solução da equação diferença do exemplo anterior.

Resposta ao Impulso de Sistemas Causais

- A equação diferença pode ser utilizada para calcular a resposta ao impulso de um sistema causal.
- Para isto, basta calcular a solução homogênea, já que x[n]=0 para n>0 e, portanto, $y_p[n]=0$.
- As condições iniciais estão restritas à h[0]=1, já que o sistema é causal, ou seja, h[n]=0 para n<0.
- Note que a resposta ao impulso de sistemas descritos na forma

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} p_k x[n-k]$$

apresenta uma resposta ao impulso de comprimento infinito, a menos que $d_0=1$ e $d_k=0$ para k>0.

- Exemplo: encontre a resposta ao impulso do exemplo anterior.

Estabilidade BIBO de um Sistema LIT

- Em via geral, se $h[n] \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ então o sistema é BIBO estável. No entanto, é impossível afirmar a estabilidade a partir apenas de algumas amostras de $h[n]$.

- A condição única e suficiente para determinar a estabilidade de um sistema está presente nas raízes da equação polinomial característica.

- Se $|\lambda_i|<1$ para qualquer valor de *i*, então o sistema é BIBO estável. Caso $|\lambda_i|>1$ para um valor específico de *i*, então o sistema é BIBO instável.

- Exercício proposto: prove a afirmação acima.

Classificação de Sistemas LIT

- Classificação quanto ao comprimento da resposta ao impulso

  - Resposta ao impulso finita: um sistema cuja resposta ao impulso seja nula para $n>N_2$ e $n< N_1$, sendo $N_2>N_1$ é classificado como FIR.

  - A saída deste sistema é dada por

$$y[n] = \sum_{k=N_1}^{N_2} h[k]x[n-k]$$

  - Note que a saída é formada por uma soma finita de amostras de entrada, tornando a implementação simples.

  - Resposta ao impulso infinita: um sistema cuja resposta ao impulso possui um número infinito de amostras é classificado como IIR.

  - No caso de um sistema causal, a saída é dada por:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

  - Note que a medida em que *n* aumenta, há um aumento no número de amostras de entrada envolvidas no computo da amostra de saída. Se n for muito grande, a implementação pode-se tornar inviável.

Classificação de Sistemas LIT

- Classificação quanto ao processo de cálculo da saída:

  - Sistemas não recursivos: são aqueles cuja amostra de saída atual pode ser calculada seqüencialmente em função apenas da amostra presente e das amostras passadas da entrada.

  - Sistemas recursivos: são aqueles cuja amostra de saída atual pode ser calculada seqüencialmente em função das amostras de saída passadas, da amostra atual de entrada e das amostras passadas de entrada.

  - Exercício proposto: mostre que é possível representar um filtro acumulador tanto na forma recursiva quanto na forma não-recursiva.

Classificação de Sistemas LIT

- Classificação quanto à natureza dos coeficientes:

  - Sistema de tempo discreto real: é aquele cuja resposta ao impulso possui todas as amostras reais.

  - Sistema de tempo discreto complexo: é aquele cuja resposta ao impulso possui um ou mais amostras complexas.

Correlação de Sinais

- Correlação é a medida de similaridade entre dois sinais.

  - Exemplos: radar, sistemas de recepção digital, reconhecimento de padrões.

- Correlação cruzada: é o grau de similaridade entre dois sinais de energia, dada por

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l] \quad \text{para } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

  onde *l* indica um atraso entre as duas seqüências.

  - Exemplo: prove que $r_{yx}[l]=r_{xy}[-l]$

Correlação de Sinais

- Função de auto-correlação: é uma medida de similaridade entre uma seqüência e sua versão atrasada de *l* amostras.

$$r_{xx}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-l] \quad \text{para } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

- Note que:

a) $r_{xx}[0]=E_x$

b) $r_{xx}[l]=r_{xx}[-l]$, o que significa que a função de auto-correlação é par.

- Exercício proposto: encontre a função de auto-correlação e correlação cruzada das seguintes seqüências:

a) $3\cos(0.1\pi n)$

b) $0.3\text{sen}(0.1\pi n)$

Correlação de Sinais

- A função de correlação pode ser expressa na forma de convolução. Compare as expressões a seguir:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

$$r_{xy}[l] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-l] \quad \text{para } l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

- Claramente, pode-se escrever que

$$r_{xy}[l] = x[l] * y[-l]$$

- Exercício proposto: desenvolva no Matlab uma função que realize a correlação de duas seqüências quaisquer de entrada utilizando a função de convolução. Note que as bases de tempo das seqüências de entrada devem ser levadas em consideração.

Propriedades da Função Correlação

- Limitação da função de auto-correlação.

$$r_{xx}[l] \leq r_{xx}[0]$$

- Prova no quadro.

- Limitação da função de correlação: se y[n]=+/-bx[n-N], então

$$-br_{xx}[0] \leq r_{xy}[l] \leq br_{xx}[0]$$

- Prova no quadro.

- Forma normalizada da correlação

$$\rho_{xx}[l] = \frac{r_{xx}[l]}{r_{xx}[0]}$$

$$\rho_{xy}[l] = \frac{r_{xy}[l]}{\sqrt{r_{xx}[0] \cdot r_{yy}[0]}}$$

- Qual é o máximo valor de $\rho_{xx}[l]$ e $\rho_{xy}[l]$?

Propriedades da Função Correlação

- Correlação e auto-correlação para sinais de potência.

$$r_{xy}[l] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} x[n]y[n-l]$$

$$r_{xx}[l] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} x[n]x[n-l]$$

- Correlação e auto-correlação para sinais periódicos

$$r_{\tilde{x}\tilde{y}}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\tilde{y}[n-l]$$

$$r_{\tilde{x}\tilde{x}}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\tilde{x}[n-l]$$

- A periodicidade da função de correlação é igual à periodicidade das seqüências envolvidas.

Capítulo 3 – Sinais Discretos no Domínio da Freqüência

- A transformada de Fourier é uma representação contínua no domínio da freqüência de uma seqüência discreta no domínio do tempo.

- Como a DTFT é periódica com um período de 2π radianos, então apenas N amostras desta transformada são suficientes para representar uma seqüência discreta de N pontos, conforme será mostrado posteriormente. Esta representação é denominada de transformada discreta de Fourier – DFT.

- Outra maneira de representar seqüências discretas no domínio da freqüência é utilizar uma generalização da DFT, denominada de transformada z, onde z é uma variável complexa.

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- A DTFT consiste na representação da seqüência x[n] em termos de $e^{-j\omega n}$, onde ω é a freqüência.
- Nem todas as seqüências possuem uma transformada, mas quando possuem essa transformada é única. Para recuperar a seqüência original a partir da sua transformada, basta aplicar a IDTFT.
- A DTFT de uma seqüência é dada por

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- A DTFT é, normalmente, uma função complexa que pode ser escrita na forma

$$X(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{j\omega}) + X_{im}(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\theta(\omega)} \qquad \text{onde} \quad \theta(\omega) = \arctan\left(\frac{X_{im}(\omega)}{X_{re}(\omega)}\right)$$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- A fase da transformada é limitada por $-\pi \leq \theta(\omega) \leq +\pi$.
- Caso a fase ultrapasse o valor π, a mesma será representada como $-\pi$.
- Essa descontinuidade pode ser eliminada utilizando a "*unwrapped phase*", ou seja, permitindo que a fase assuma qualquer valor.
- Neste caso, a fase é representada por $\theta_c(\omega)$.

- Exercício: mostre que $X_{re}(e^{j\omega n})$ é uma função par enquanto que $X_{im}(e^{j\omega n})$ é uma função ímpar.

- Exemplo: encontre a DTFT de:

  a) $x[n]=\delta[n]$

  b) $x[n]=\alpha^n u[n]$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- A fase da transformada é limitada por $-\pi \leq \theta(\omega) \leq +\pi$.
- Caso a fase ultrapasse o valor π, a mesma será representada como $-\pi$.
- Essa descontinuidade pode ser eliminada utilizando a "*unwrapped phase*", ou seja, permitindo que a fase assuma qualquer valor.
- Neste caso, a fase é representada por $\theta_c(\omega)$.
- Exercício: mostre que $X_{re}(e^{j\omega n})$ é uma função par enquanto que $X_{im}(e^{j\omega n})$ é uma função ímpar.
- Exemplo: encontre a DTFT de:

  a) $x[n]=\delta[n]$

  b) $x[n]=\alpha^n u[n]$
- Prove que $X(e^{j\omega n})$ é periódica a cada 2π radianos.

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- As amostras de x[n] podem ser obtidas a partir de $X(e^{j\omega n})$ através da IDTFT:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega$$

- Exercício: prove que a expressão acima é verdadeira.

- Condição de convergência: para que a DTFT de uma seqüência possa ser calculada, a mesma deve ser convergente, ou seja, deve possuir energia finita.
- Todas as seqüências absolutamente somáveis são convergentes.
- Nem todas as seqüências convergentes são absolutamente somáveis.
- Veja Exemplo 3.3 da página 121.

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- Algumas seqüências ilimitadas possuem TFTD.

Table 3.1: Commonly used discrete-time Fourier transform pairs.

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$\delta[n]$	1
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$\mu[n]$	$\dfrac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$e^{j\omega_o n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_o + 2\pi k)$
$\alpha^n \mu[n], \quad (\lvert\alpha\rvert < 1)$	$\dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

- Largura de faixa de sinais discretos:

  Um sinal discreto pode ser classificado como:

  a) Sinal de banda cheia: quando seu espectro ocupa toda a banda, ou seja $0 \leq |\omega| \leq \pi$.

  b) Sinal limitado em faixa: podem ser sub-divididos em:

  1) Sinais passa-baixa: são aqueles cujo espectro está limitado em $0 \leq |\omega| \leq \omega_p < \pi$, sendo ω_p a largura de faixa do sinal.

  2) Sinais passa-faixa: são aqueles cujo espectro está limitado em $0 < \omega_L \leq |\omega| \leq \omega_H < \pi$, onde $\omega H - \omega L$ é a largura de faixa do sinal.

Propriedades da TFTD

- Linearidade: se y[n]= ax[n]+bg[n], então

$$Y(e^{j\omega})=aX(e^{j\omega})+bG(e^{j\omega})$$

Prova no quadro.

- Deslocamento temporal: se y[n]=x[n-no], então

$$Y(e^{j\omega})=e^{-j\omega no}X(e^{j\omega})$$

Prova no quadro.

- Deslocamento na freqüência: se $y[n]=e^{j\omega on}x[n]$, então

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j(\omega-\omega o)})$$

Prova no quadro.

Propriedades da TFTD

- Derivação na freqüência: se y[n]=nx[n], então

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = j\frac{d}{d\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

Prova no quadro.

- Convolução: se y[n]=x[n]*g[n], então

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\cdot G(e^{j\omega})$$

Prova: exercício proposto.

- Modulação: se y[n]=x[n]g[n], então

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\theta}\right)G\left(e^{j\theta}\right)d\theta$$

Prova: exercício proposto

Propriedades da TFTD

- Propriedades das seqüências simétricas complexas.

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
$\mathrm{Re}\{x[n]\}$	$X_{cs}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\}$
$j\mathrm{Im}\{x[n]\}$	$X_{ca}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\{X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\}$
$x_{cs}[n]$	$X_{re}(e^{j\omega})$
$x_{ca}[n]$	$jX_{im}(e^{j\omega})$

- Propriedades das seqüências simétricas reais.

Sequence	Discrete-Time Fourier Transform
$x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{j\omega}) + jX_{im}(e^{j\omega})$
$x_{ev}[n]$	$X_{re}(e^{j\omega})$
$x_{od}[n]$	$jX_{im}(e^{j\omega})$
Symmetry relations	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
	$X_{re}(e^{j\omega}) = X_{re}(e^{-j\omega})$
	$X_{im}(e^{j\omega}) = -X_{im}(e^{-j\omega})$
	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$
	$\arg\{X(e^{j\omega})\} = -\arg\{X(e^{-j\omega})\}$

Densidade Espectral de Energia

- Teorema de Parseval ou Teorema da Conservação da Energia:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G\left(e^{j\omega}\right)H^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

- Caso interessante: se h[n]=g[n], o que estabelece o Teorema de Parseval?

- Densidade espectral de energia de uma seqüência:

$$S_{xx}\left(e^{j\omega}\right) = \left|G\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$$

- Note que

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{xx}\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

Densidade Espectral de Energia

- Relação entre a densidade espectral de energia a a função de correlação.

$$S_{xx}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{xx}(l)\, e^{-j\omega l}$$

$$S_{xy}\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{xy}(l)\, e^{-j\omega l}$$

Prova no quadro.

- Exercício: encontre a função densidade espectral de energia da seguinte seqüência:

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

- Proposto: faça um programa em Matlab que compute a TFTD de uma seqüência qualquer.

Transformada Discreta de Fourier – DFT

- A DFT somente é definida para seqüências finitas.
- Uma seqüência com *N* pontos é completamente caracterizada por *N* pontos da TFTD, em freqüências ω_k, onde $0 \leq k \leq N-1$, onde ω_k são amostras igualmente espaçadas de ω.

$$X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\big|_{w=2\pi k/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

$$\text{Sendo } W_N = \frac{2\pi}{N}, \text{ então}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

- A transformada inversa é dada por

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

- Prova no quadro!

Transformada Discreta de Fourier – DFT

- Exemplo: encontre a DFT das seguintes seqüências:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & 1 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$$x[n] = \cos\left(2\pi r \frac{n}{N}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Transformada Discreta de Fourier – DFT

- .