Séries de Fourier

Notas de aulas compiladas no dia 6 de Maio de 2003

Computação, Engenharia Elétrica e Engenharia Civil

Prof. Ulysses Sodré

email: <ulysses@sercomtel.com.br>
email: <ulysses@matematica.uel.br>
Material compilado no dia 6 de Maio de 2003.

Para conhecer centenas de aplicações da Matemática, visite a Home Page:

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/

E apliquei o meu coração a esquadrinhar, e a informar-me com sabedoria de tudo quanto sucede debaixo do céu; esta enfadonha ocupação deu Deus aos filhos dos homens, para nela os exercitar. Atentei para todas as obras que se fazem debaixo do sol, e eis que tudo era vaidade e aflição de espírito. Aquilo que é torto não se pode endireitar; aquilo que falta não se pode calcular. Falei eu com o meu coração, dizendo: Eis que eu me engrandeci, e sobrepujei em sabedoria a todos os que houve antes de mim em Jerusalém; e o meu coração contemplou abundantemente a sabedoria e o conhecimento. E apliquei o meu coração a conhecer a sabedoria e a conhecer os desvarios e as loucuras, e vim a saber que também isto era aflição de espírito. Porque na muita sabedoria há muito enfado; e o que aumenta em conhecimento, aumenta em dor.
(ECLESIASTES 1:13-18, Bíblia Sagrada.)

Conteúdo

Lista de Figuras

1 A importância das séries de Fourier

Existe uma enorme diferença entre estudar séries de Fourier e séries de potências, pois uma série de Fourier funciona como um processo *global* enquanto que uma série de potências é *local*. Apresentaremos alguns problemas mostrando que nem sempre é viável trabalhar com séries de potências, mas pelo contrário, temos a necessidade de trabalhar com Séries de Fourier em sistema práticos.

1.1 Problema de aproximação

Com a série de Taylor de uma função f, obtemos o polinômio de Taylor que dá uma boa aproximação para a função f nas vizinhanças de um ponto, mas uma há uma exigência: que esta função f seja suficientemente *suave*, ou seja, que f possua derivadas contínuas até uma certa ordem dada, tanto no ponto como nas vizinhanças deste ponto. Para obter um processo de aproximação global, este método falha pois a aproximação de Taylor é local e não global.

1.2 Problema do limite

Para obter o limite de f num ponto x_0, a aproximação polinomial de Taylor funciona bem mas em pontos distantes de x_0, o processo é ruim. Isto acontece também para funções descontínuas e ocorrem falhas pois este processo de aproximação é local.

1.3 Problema da integral

Para obter valores aproximados para uma integral sobre um intervalo, a aproximação de Taylor não funciona. Este problema pode ser resolvido com o uso de Séries de Fourier uma vez que trabalhamos com funções periódicas.

1.4 Jean B. Fourier

Jean B. Fourier (1768-1830) foi pioneiro na investigação destes problemas. No livro *"Théorie Analytique de la Chaleur"*, escrito em 1822, ele introduziu o conceito conhecido atualmente como Série de Fourier, que é muito utilizado nas ciências em geral, principalmente nas áreas envolvidas com: Matemática, Engenharia, Computação, Música, Ondulatória, Sinais Digitais, Processamento de Imagens, etc.

2 Funções Periódicas

2.1 Conceitos gerais sobre funções periódicas

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica, se existe um número $p \in R$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+p) = f(x)$$

O número p é um dos períodos de f. Às vezes existem vários números com esta propriedade, mas o menor número real positivo com esta característica é chamado *período fundamental* de f, que é simplesmente denominado período.

Se uma função f tem período p, diz-se que f é p-periódica e denotamos este fato por $f(x) = f(x+p)$.

Muitas vezes, é vantajoso tomar o período $p = 2L$ e a função definida no intervalo real simétrico $[-L, L]$, com o objetivo de simplificar as operações.

Exemplos: As funções $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \sin(nx)$, $k(x) = \cos(mx)$ e $p(x) = A\cos(mx) + B\sin(nx)$ são periódicas.

Exercício: Sejam f e g funções reais.

1. Obter o período (fundamental) de:

$$f(x) = 3\ \sin(2x) + 4\ \cos(3x)$$

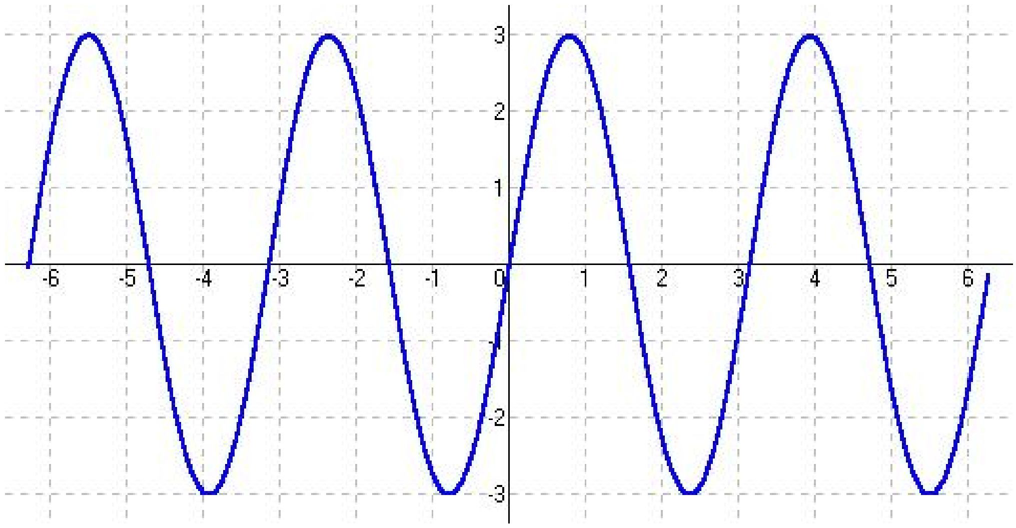

Figura 1: Uma função periódica

2. Se $a \in R$ e $f = f(x)$ é $2L$-periódica, mostrar que
$$\int_{a-L}^{a+L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)dx$$
3. Se $g(x) = \int_0^x f(u)du$, $f = f(x)$ é $2L$-periódica e além disso
$$\int_{-L}^{L} f(u)du = 0$$
demonstrar que g é $2L$-periódica.
4. Se $g(x) = \int_0^x f(u)du$ e g é $2L$-periódica, mostrar que
$$\int_{-L}^{L} f(u)du = 0$$

2.2 Núcleo de Dirichlet

O Núcleo de Dirichlet é definido para todo $x \in \mathbb{R}$, por:
$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$$
É possível mostrar que se $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$, então:
$$D_n(x) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})x]}{2\sin(\frac{x}{2})}$$

Como $2\cos(p)\sin(q) = \sin(p+q) - \sin(p-q)$, tomando $p = kx$ e $q = x/2$ teremos para todo $k = 1, \cdots, n$:

$$2\cos(kx)\sin(\frac{x}{2}) = \sin[(k+\frac{1}{2})x] - \sin[(k-\frac{1}{2})x]$$

Assim:

$$\begin{aligned}
2\cos(1x)\sin(\frac{x}{2}) &= \sin(\frac{3x}{2}) - \sin(\frac{1x}{2}) \\
2\cos(2x)\sin(\frac{x}{2}) &= \sin(\frac{5x}{2}) - \sin(\frac{3x}{2}) \\
2\cos(3x)\sin(\frac{x}{2}) &= \sin(\frac{7x}{2}) - \sin(\frac{5x}{2}) \\
&\cdots \\
2\cos(nx)\sin(\frac{x}{2}) &= \sin[(n+\frac{1}{2})x] - \sin[(n-\frac{1}{2})x]
\end{aligned}$$

Somando membro a membro as igualdades acima e dividindo a soma por $2\ \sin(\frac{x}{2})$, teremos o resultado.

No ponto $x = 0$, definimos

$$D_n(0) = \lim_{x\to 0} D_n(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})x]}{2\sin(\frac{x}{2})} = n + \frac{1}{2}$$

Este valor é garantido pelo limite fundamental

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Exercício: Escrever a função $f(x) = B\cos(nx) + C\sin(nx)$ na forma:

$$f(x) = A\cos(nx - \varphi)$$

2.3 Polinômio trigonométrico

Um polinômio trigonométrico $p_n = p_n(x)$ de ordem n é uma função 2π-periódica da forma:

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$$

2.4 Série trigonométrica

Uma série trigonométrica é uma representação $f = f(x)$ em série de funções trigonométricas da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

3 Fórmulas e integrais trigonométricas

3.1 Algumas fórmulas trigonométricas

Se $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, então

1. $\cos(m+n)x = \cos(mx)\cos(nx) - \sin(mx)\sin(nx)$
2. $\sin(m+n)x = \sin(mx)\cos(nx) + \sin(nx)\cos(mx)$
3. $2\sin(mx)\cos(nx) = \sin[(m+n)x] + \sin[(m-n)x]$
4. $2\cos(mx)\cos(nx) = \cos[(m+n)x] + \cos[(m-n)x]$
5. $2\sin(mx)\sin(nx) = \cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]$

3.2 Integrais trigonométricas

Se $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, então

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0$
2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$

4 Funções absolutamente integráveis

4.1 Função integrável sobre um intervalo

Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável sobre um intervalo real $[a, b]$ se

$$\int_a^b f(u)\, du < \infty$$

Exemplo: As funções $f(x) = \cos(mx)$ e $g(x) = \sin(nx)$ são integráveis.

4.2 Função integrável sobre a reta real

Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integrável sobre a reta $\mathbb{R}$ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du < \infty$$

Exemplo: A função (sinc) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

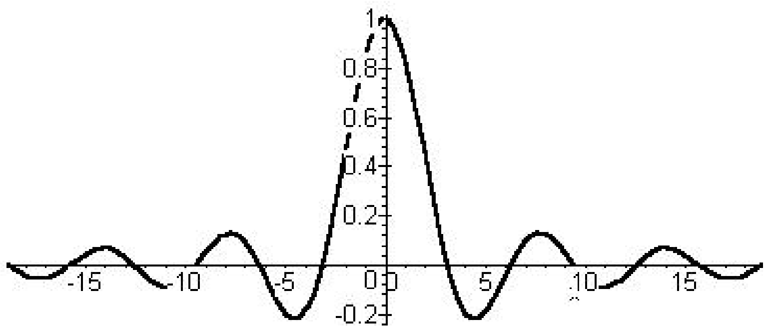

Figura 2: Função sinc

Esta função é integrável sobre a reta real, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \pi$$

4.3 Função absolutamente integrável sobre um intervalo

Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é absolutamente integrável sobre um intervalo $[a, b]$ se:

$$\int_a^b |f(u)|\, du < \infty$$

Exemplo: As funções $f(x) = \cos(mx)$ e $g(x) = \sin(nx)$ são absolutamente integráveis sobre intervalos da forma $[a, b]$.

4.4 Função absolutamente integrável sobre a reta real

Uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é absolutamente integrável a reta $\mathbb{R}$ se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\, du < \infty$$

Exemplo: A função (sinc) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é absolutamente integrável, pois

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{\sin(x)}{x}| dx = +\infty$$

5 Séries de Fourier e Coeficientes de Fourier

Seja $f(x) = f(x + 2\pi)$ uma função integrável sobre sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$ e $n \in \mathbb{N}$. A série de Fourier de f é a série trigonométrica:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

onde a_0, a_n e b_n são os **coeficientes de Fourier** de f definidos por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \end{aligned}$$

O símbolo $\sim$ foi usado aqui, pois nem sempre esta série de funções converge para f, mas se f for 2π-periódica e seccionalmente diferenciável, obteremos a convergência da série trigonométrica, e dessa forma poderemos substituir o sinal $\sim$ pelo sinal de igualdade.

Exercícios:

1. Seja a função (sinal) 2π-periódica, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

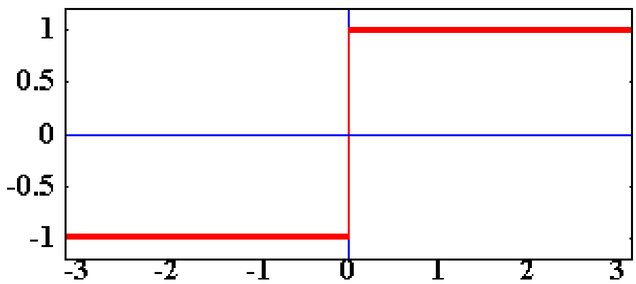

Figura 3: Função sinal

Mostrar que a série de Fourier da função sinal é representada por

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}$$

2. Seja a função 2π-periódica, definida por:

$$f(x) = |x|, \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

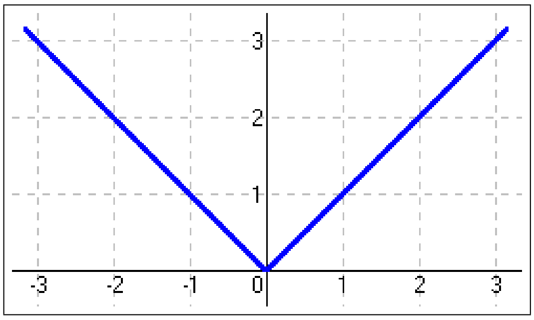

Figura 4: Função modular

Mostrar que a série de Fourier desta função é representada por

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2}$$

Exemplos:

1. Para obter a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & \text{se} \quad 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

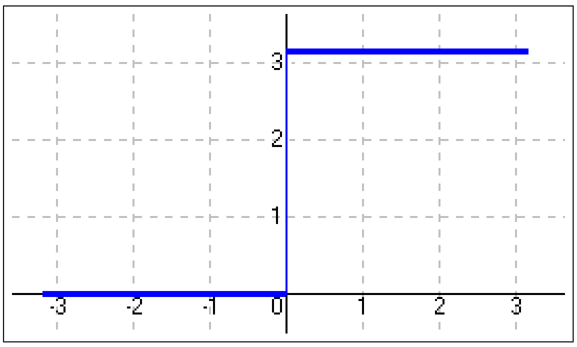

Figura 5: Função sinal transladada para cima

devemos calcular primeiramente os seus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\ \{\int_{-\pi}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{\pi} \pi\ dx\} = \pi$$

e para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos(nx)dx = 0$$

Como

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\sin(nx)dx = \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}$$

Para n par, obtemos $b_n = 0$ e para n ímpar:

$$b_{2k-1} = \frac{2}{2k-1} \quad (k \in N)$$

assim a série de Fourier será dada por

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}$$

ou seja

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right)$$

2. Para obter a série de Fourier da função

$$g(x) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se} \quad -\pi \le x < 0 \\ \pi/2 & \text{se} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

basta usar o fato que

$$g(x) = \frac{\pi}{2}\,\text{sinal}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

e utilizar a série de Fourier da função sinal, para obter:

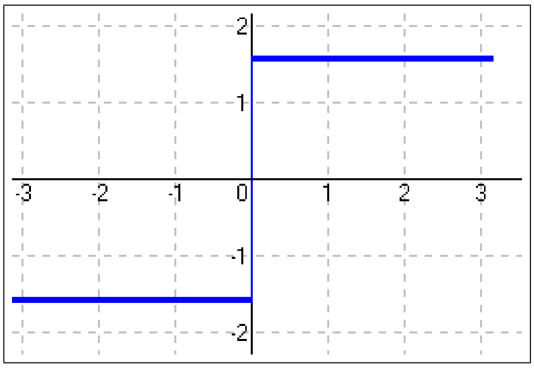

Figura 6: Função sinal multiplicada por $\pi/2$

$$g(x) \sim 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right)$$

Observação: A partir da série de Fourier para funções 2π-periódicas podemos obter a série de Fourier para funções periódicas com período $2L$. Basta tomar a mudança de variável $x = \pi t/L$ para obter a nova função, agora dependente da variável t, que será $2L$-periódica e integrável no intervalo simétrico $[-L, L]$.

Definição: Se $f = f(t)$ é uma função $2L$-periódica e integrável no intervalo $[-L, L]$, a sua série de Fourier é dada por:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{n\pi t}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi t}{L})]$$

onde os coeficientes podem ser dados pelas expressões:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(\frac{n\pi t}{L})dt$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin(\frac{n\pi t}{L})dt$$

para $n \geq 1$. a_0 pode ser obtido se tomarmos $n = 0$ no coeficiente a_n.

Exemplo: A série de Fourier da função 4-periódica

$$f(t) = \frac{t+|t|}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 \le t < 0 \\ t & \text{se} \quad 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

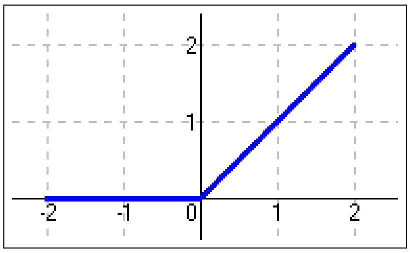

Figura 7: Média aritmética entre t e $|t|$

pode ser obtida com $L = 2$ (metade do período=4). Assim:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 t\,dt = 1$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 t\cos(\frac{n\pi t}{2})dt = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 t\sin(n\frac{\pi t}{2})dt = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

Logo

$$f(t) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\cos(\frac{n\pi t}{2}) - \frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin(\frac{n\pi t}{2})]$$

5.1 Aplicação de série de Fourier à soma de uma série numérica

Através da séries de Fourier podemos obter somas de séries numéricas reais onde é difícil (ou até impossível) estabelecer a regra para definir a n-ésima soma parcial.

Exercício:

1. Obter a série de Fourier da função 2π-periódica $f(x) = x^2$ definida sobre $[-\pi, \pi]$.

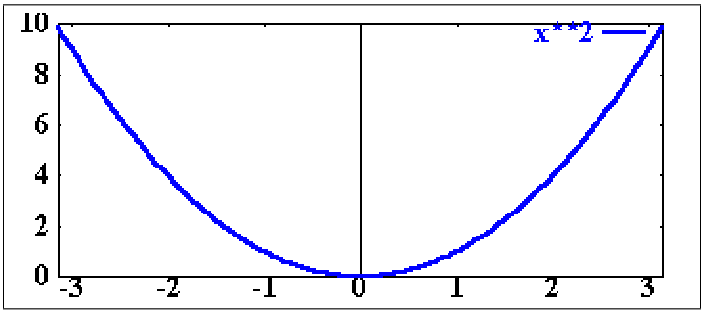

Figura 8: Função parabólica

Tomar $x = \pi$ na série de Fourier para obter:

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

2. Obter as séries de Fourier das funções 2π-periódicas $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$ definidas sobre $[-\pi, \pi]$ e calcular as somas das séries numéricas:

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \qquad \text{e} \qquad S_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

6 Tipos importantes de simetrias

Uma função real T-periódica $f = f(t)$, tem

1. **simetria par**, se para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = f(t)$. As funções pares são simétricas em relação ao eixo vertical $t = 0$.
2. **simetria ímpar**, se para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(-t) = -f(t)$. As funções ímpares são simétricas em relação à origem $(0, 0)$.
3. **simetria de meia-onda**, se para todo $t \in R$, $f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$. Do ponto de vista geométrico, o gráfico da segunda metade da função $f = f(t)$ no período T é a reflexão do gráfico da primeira metade de $f = f(t)$ em relação ao eixo horizontal, deslocada de $\frac{T}{2}$ para a direita. Tal situação pode ser vista no gráfico.

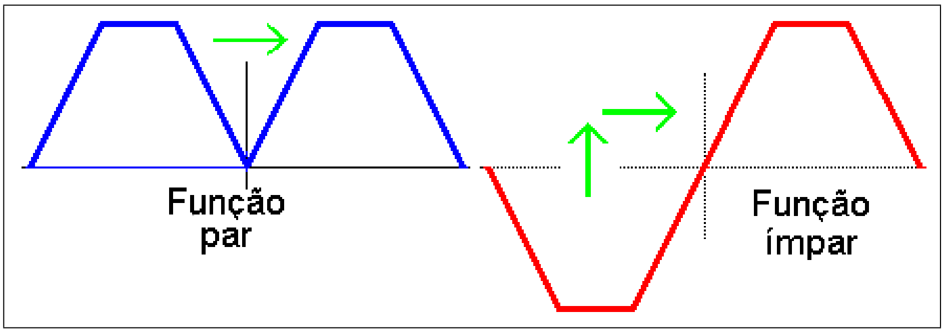

Figura 9: Funções com simetrias par e ímpar

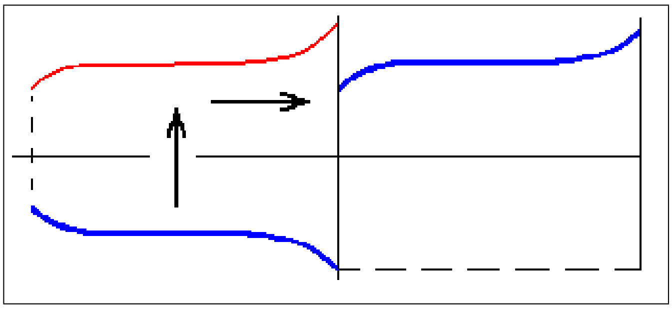

Figura 10: Função com simetria de meia-onda

4. **simetria de quarto de onda**, se para todo $t \in R$ a função f tem simetria de meia-onda e além disso, vale **uma** das alternativas abaixo:

   (a) f é ímpar.

   (b) Transladando f de $\frac{T}{4}$ para a direita (esquerda), a função se torna **par**, isto é

$$f(t - \frac{T}{4}) = f(t)$$

6.1 Propriedades de funções com simetrias par e ímpar

São válidas as seguintes propriedades:

1. A soma de funções `pares` é uma função `par`.
2. A soma de funções `ímpares` é uma função `ímpar`.

3. O produto de duas funções `pares` é uma função `par`.
4. O produto de duas funções `ímpares` é uma função `par`.
5. O produto de uma função `par` por uma função `ímpar` é uma função `ímpar`.
6. Toda função real $f = f(t)$ pode ser decomposta na soma

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

onde $f_p = f_p(t)$ é uma função par e $f_i = f_i(t)$ é uma função ímpar, definidas respectivamente por

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Exemplo: São pares as funções reais:

$$f(x) = \cos(nx), \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = x^{76}$$

São ímpares as funções reais:

$$f(x) = \sin(nx), \quad f(x) = x, \quad f(x) = x^{77}$$

A função real **identicamente nula** é, ao mesmo tempo, par e ímpar.

7 Integrais de funções com simetrias

7.1 Propriedades das integrais com simetrias

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável no intervalo `simétrico` $[-L, L]$.

1. Se $f = f(t)$ é uma função `par`, então:

$$\int_{-L}^{L} f(t)\, dt = 2 \int_{0}^{L} f(t)\, dt$$

2. Se $f = f(t)$ é uma função `ímpar`, então:

$$\int_{-L}^{L} f(t)\ dt = 0$$

7.2 Propriedades das simetrias para os coeficientes de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica, integrável e absolutamente integrável no intervalo **simétrico** $[-\pi, \pi]$.

1. Se f é uma função `par`, então $b_n = 0$ e $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

2. Se f é uma função `ímpar`, então $a_n = 0$ e $n = 1, 2, 3, \cdots$:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Exemplo: Usando o benefício da paridade, obteremos a série de Fourier da função 2π-periódica, definida sobre $[-\pi, \pi]$ por:

$$f(x) = x, \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

Como f é ímpar, então $a_n = 0$ e para $n \geq 0$, basta obter os coeficientes b_n. Para qualquer $n \geq 1$, temos:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = 2\ \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

logo

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = 2 \left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots \right)$$

8 Descontinuidade de funções reais

8.1 Salto de função descontínua

Se uma função real $f = f(x)$ possui uma descontinuidade em um ponto p, definimos o salto de f em p como

$$\text{salto}(f)(p) = f(p_+) - f(p_-)$$

onde $f(p_-)$ e $f(p_+)$ são, respectivamente, os limites laterais de f à esquerda e à direita em $x = p$, isto é:

$$f(p_-) = \lim_{x \to p,\, x<p} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(p_+) = \lim_{x \to p,\, x>p} f(x)$$

8.2 Valor médio de uma função em um ponto

Quando a função não está definida no ponto $x = p$ mas existem os limites laterais à esquerda e à direita em $x = p$, podemos definir a função neste ponto como sendo o valor médio (média aritmética) dos limites laterais à esquerda e à direita em $x = p$, isto é:

$$\overline{f}(p) = \frac{f(p_+) + f(p_-)}{2}$$

Se $f = f(x)$ é uma função contínua no ponto x, então

$$f(x_+) = f(x_-) = \overline{f}(x) = f(x)$$

8.3 Descontinuidade de primeira espécie

Uma função real $f = f(x)$ tem descontinuidade de primeira espécie (ou de salto finito) em $x = p$, se satisfaz às três condições:

1. Sobre cada intervalo limitado I da reta real, f é contínua, exceto no ponto $p \in I$;

2. f é contínua à direita de $x = p$ e contínua à esquerda de $x = p$;
3. $\text{salto}(f)(p) = f(p_+) - f(p_-)$ é **finito**.

Exemplo: A função sinal $f : [-2, 4] \to R$ definida por

$$f(x) = \text{sinal}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

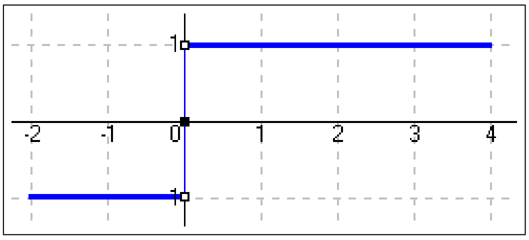

Figura 11: Função sinal em um intervalo não simétrico

tem descontinuidade de salto finito em $x = 0$, pois f é contínua sobre $[-2, 4]$ exceto em $x = 0$, f é contínua à direita de $x = 0$, f é continua à esquerda de $x = 0$ e além disso:

$$f(0_+) = \lim_{x \to 0_+} f(x) = 1, \qquad f(0_-) = \lim_{x \to 0_-} f(x) = -1$$
$$\text{salto}(f)(0) = 2 \qquad \overline{f}(0) = 0$$

8.4 Descontinuidade de segunda espécie

Uma função real $f = f(x)$ tem descontinuidade de segunda espécie (ou de salto infinito) em p, se satisfaz às três condições:

1. Sobre cada intervalo finito I, f é contínua, exceto no ponto $p \in I$;
2. f é contínua à direita de $x = p$ e à esquerda de $x = p$;
3. $\text{salto}(f)(p) = f(p_+) - f(p_-)$ é **infinito**.

Exemplo: A função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida por $f(x) = 1/x$ possui uma descontinuidade de segunda espécie.

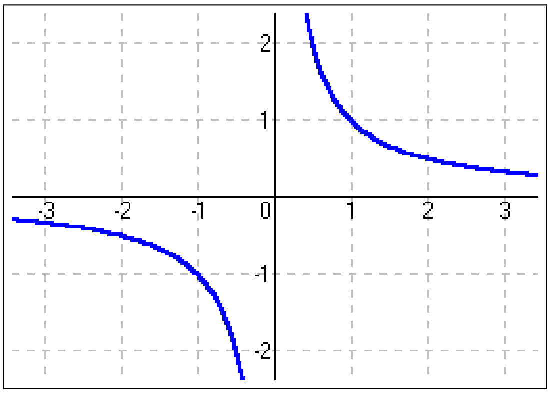

Figura 12: Função hiperbólica

9 Funções Seccionalmente diferenciáveis

9.1 Função seccionalmente contínua

Uma função real $f = f(x)$ é seccionalmente contínua sobre $\mathbb{R}$ é uma função que restrita a cada intervalo limitado $I \subset R$, possui no máximo um número finito de descontinuidades de **salto finito**. Os limites laterais de $f = f(x)$ à esquerda e à direita nos pontos de descontinuidade de salto finito p_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ são indicados, respectivamente, por:

$$f(p_{j\_}) = \lim_{x \to p_{j\_}} f(x) \qquad f(p_{j+}) = \lim_{x \to p_{j+}} f(x)$$

e o salto de f em cada p_j é indicado por:

$$\text{salto}(f)(p_j) = f(p_{j+}) - f(p_{j\_})$$

Exemplo: São seccionalmente contínuas sobre $\mathbb{R}$, as funções:

1. $f(x) = [x] = \max\{z \in Z : z \leq x\}$ (função máximo inteiro)
2. $g(x) = x - [x]$, $g(x) = g(x + 2\pi)$ (função dente de serra)
3. $h(x) = |x|$, $h(x) = h(x + 2\pi)$ (função modular)

Exemplo: A função $j : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, definida por $j(x) = 1/x$ não é seccionalmente contínua sobre $\mathbb{R}$, pois possui uma descontinuidade de segunda espécie (salto infinito) em $x = 0$.

Exercício: Construir os gráficos de todas as funções dos exemplos acima, observando que tais funções são contínuas sobre cada intervalo de medida finita.

9.2 Lema fundamental

Se $f : [a,b] \to R$ é uma função seccionalmente contínua, então f é limitada e integrável sobre $[a,b]$.

O resultado deste Lema é muito importante do ponto de vista das aplicações, pois muitas funções reais utilizadas na prática são seccionalmente contínuas.

9.3 Função seccionalmente diferenciável

Uma função real $f = f(x)$ é seccionalmente diferenciável se satisfaz às duas propriedades

1. $f = f(x)$ é seccionalmente contínua;
2. A derivada de $f = f(x)$ é seccionalmente contínua.

Exemplos: São seccionalmente diferenciáveis as funções

1. $f(x) = [x] = \max\{z \in Z : z \leq x\}$ (função máximo inteiro)
2. $g(x) = x - [x]$, $g(x) = g(x + 2\pi)$ (função dente de serra)
3. $h(x) = |x|$, $h(x) = h(x + 2\pi)$ (função modular)

mas a função $m(x) = m(x + 2\pi)$ definida por $m(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}$ não é seccionalmente diferenciável mas somente seccionalmente contínua.

10 Teorema de Fourier

Se f é uma função seccionalmente diferenciável e 2π-periódica, a série de Fourier de f converge uniformemente para o valor médio de f em cada ponto, isto é:

$$\overline{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Quando f é contínua em x, escreveremos simplesmente

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

11 Aproximação de função pela série de Fourier

Teorema de Weierstrass: Se f é uma função contínua real periódica de período 2π, então f pode ser aproximada uniformemente por uma sequência de polinômios trigonométricos da forma

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

Este teorema é fundamental na Teoria de Aproximação de funções, sendo muito usado em Análise Numérica e com ele, podemos mostrar a relação gráfica existente entre uma função f e as n-ésimas somas parciais (n-ésimas reduzidas) da série de Fourier de f.

Este estudo pode ser estendido a funções 2π-periódicas seccionalmente diferenciáveis.

Exemplo: A função $f(x) = |x|$, 2π-periódica, definida sobre $[-\pi, \pi]$, possui desenvolvimento de Fourier dado por:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{25}\cos(5x) + \dots\right)$$

Esta função satisfaz às hipóteses dos Teoremas de Weierstrass e de Fourier, assim podemos garantir a igualdade de f com a sua série e garantir a convergência uniforme da série. Temos então que:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)$$

Utilizando gráficos, mostraremos o processo de aproximação de f com estas primeiras somas parciais.

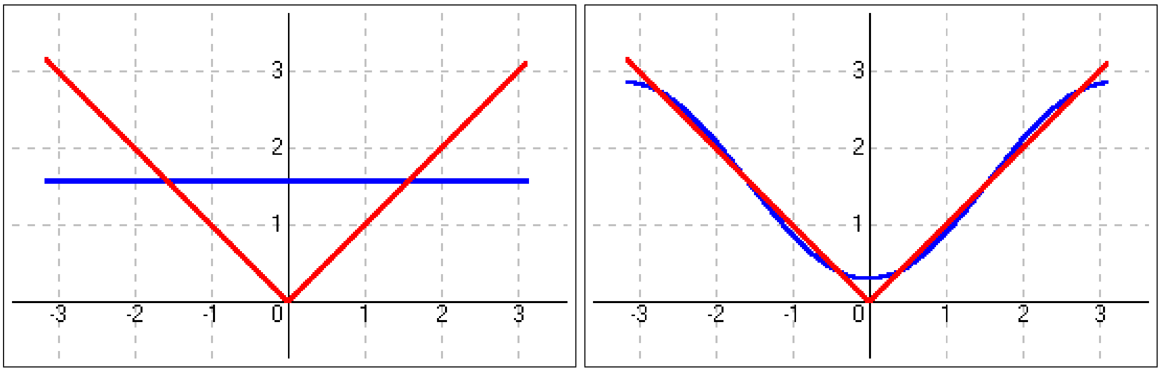

Figura 13: Função modular com a 1a. e 2a. aproximações

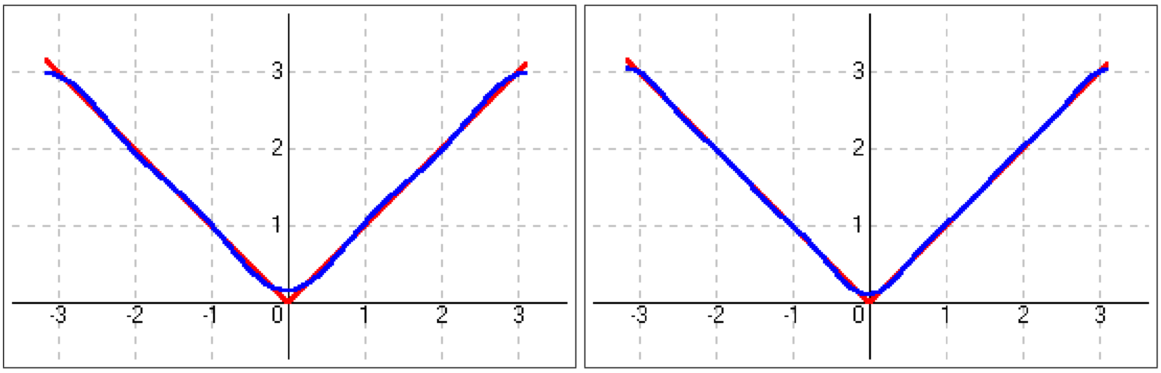

Figura 14: Função modular com a 3a. e 4a. aproximações

As somas parciais (reduzidas) desta série de Fourier, serão denotadas por $S_1(f)$, $S_2(f)$, $S_3(f)$, $S_4(f)$, $\cdots$ e neste caso:

$$\begin{aligned}
S_1(f) &= \frac{\pi}{2} \\
S_2(f) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos(x) \\
S_3(f) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}[\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9}] \\
S_4(f) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}[\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25}]
\end{aligned}$$

Quando n aumenta arbitrariamente ($n \to \infty$) então $S_n(f) \to f$ e observamos pelos gráficos que $S_4(f)$ já representa uma boa aproximação para f sobre $[-\pi, \pi]$.

12 O fenômeno de Gibbs e a série de Fourier

Se $f = f(x)$ é uma função seccionalmente diferenciável e absolutamente integrável, o Teorema de Fourier garante que a série de Fourier de $f = f(x)$ converge uniformemente para f em todo o intervalo fechado que não contém pontos de descontinuidade de f.

Se existir um ponto de descontinuidade neste intervalo I, a convergência não poderá ser uniforme em I. Gibbs estudou a convergência da série de Fourier próximo a um ponto p de descontinuidade e descobriu uma curiosidade, que é conhecida como `fenômeno de Gibbs`.

Se definimos a oscilação da soma parcial de ordem n no ponto $x = p$ por

$$\omega_n(S_n, p) = \max S_n(f) - \min S_n(f)$$

Gibbs observou que o valor desta oscilação **não** se aproxima do salto de f no ponto $x = p$, independente do grau de proximidade de x com p.

Na verdade, a soma parcial da série de Fourier ultrapassa o valor limite da função (sinal no nosso exemplo) à direita e tem valor menor

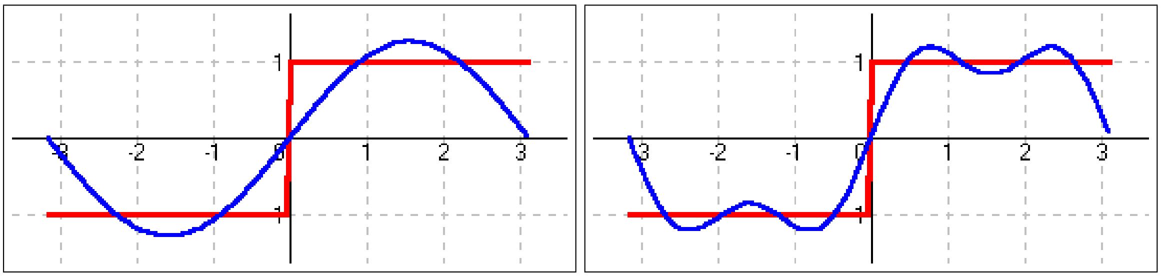

Figura 15: Fenômeno de Gibbs com a 1a. e 2a. aproximações

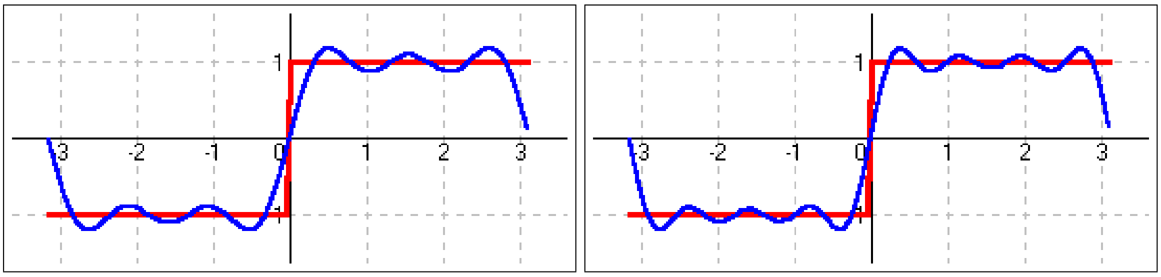

Figura 16: Fenômeno de Gibbs com a 3a. e 4a. aproximações

do que a função (sinal do nosso exemplo gráfico). Esta é uma forma natural de compensar o salto que a soma parcial realizará.

13 Séries de Fourier de Senos e Cossenos (Extensões)

13.1 O papel das extensões de funções

Ao estudar Equações Diferenciais Parciais, muitas vezes necessitamos estender o domínio de uma função $2L$-periódica que está definida apenas sobre o meio intervalo $[0, L]$ ao intervalo completo $[-L, L]$ para nos beneficiarmos da simetria da função no intervalo simétrico.

A idéia é estender o domínio da função $f = f(x)$ que é $[0, L]$ a todo o intervalo $[-L, L]$, de modo que a extensão f_e seja uma função par ou ímpar e então construir a série de Fourier da **extensão**.

Vamos supor que o domínio de $f = f(x)$ seja $[0, \pi]$ e além disso

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx)$$

Devemos estender esta função $f = f(x)$ a todo o intervalo simétrico $[-\pi, \pi]$ de modo que a extensão seja uma função `par`, pois a função dada está desenvolvida em série de cossenos.

A extensão par pode ser definida por

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{se} \quad -\pi \le x < 0 \\ f(x) & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Observamos que a extensão f_2 coincide com a função f sobre o intervalo $[0, \pi]$.

Suponhamos agora que o domínio de $f = f(x)$ seja $[0, \pi]$ e além disso

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$$

Devemos estender esta função $f = f(x)$ a todo o intervalo simétrico $[-\pi, \pi]$ de modo que a extensão seja uma função `ímpar`, pois a função dada está desenvolvida em série de senos.

A extensão ímpar pode ser definida por

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{se} \quad -\pi \le x < 0 \\ f(x) & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

A extensão f_1 coincide com a função f sobre o intervalo $[0, \pi]$.

Pelas definições acima, $f_1 = f_1(x)$ é uma extensão ímpar e $f_2 = f_2(x)$ é uma extensão par. Estas extensões são definidas e integráveis sobre o intervalo $[-\pi, \pi]$, coincidindo com $f = f(x)$ sobre a "metade do intervalo" $[0, \pi]$.

A partir do exposto acima, a função f_1 é a extensão ímpar de f e f_2 é chamada a extensão par de f.

13.2 Extensões de funções 2π-periódicas

1. A série de Fourier da extensão **ímpar** f_1, denominada a série de Fourier de **senos** da função f, é dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \sin(nx)$$

sendo que para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes ímpares de Fourier são:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \ \sin(nx) \ dx$$

2. A série de Fourier da extensão **par** f_2, chamada a série de Fourier de **cossenos** da função f, é dada por:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \cos(nx)$$

sendo que para cada $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes pares de Fourier são dados por:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \ \cos(nx) \ dx$$

Exemplo: Para obter a extensão par da função $f(x) = x$ definida sobre o meio-intervalo $[0, \pi]$, construiremos a extensão f_2, que no intervalo $[-\pi, \pi]$ é dada por:

$$f_2(x) = |x|$$

Como f_2 é par, os coeficientes ímpares são nulos, isto é, $b_n = 0$ para todo $n \in N$ e os coeficientes pares a_n são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \ dx = \pi$$

e

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \ dx = \frac{2}{n^2 \pi} (\cos(n\pi) - 1)$$

logo

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots \right)$$

Exemplo: Para a série de Fourier de senos da função $f(x) = 1$ sobre $x \in [0, \pi]$, devemos tomar a extensão ímpar f_1 de f que no intervalo $[-\pi, \pi]$ será dada por:

$$f_1(x) = \text{sinal}(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0 \\ +1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Como f_1 é ímpar, os coeficientes pares são nulos, isto é, $a_n = 0$ e os coeficientes ímpares b_n são dados por:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

Assim, $b_n = 0$ se n é par, mas se n é ímpar da forma $n = 2k - 1$ onde $k \in N$, temos que:

$$b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}$$

logo

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \cdots\right)$$

Exemplo: Seja a função de $f(x) = \cos(x)$ sobre $x \in [0, \pi]$. Para obter a série de Fourier de Senos, devemos estender esta função f à função ímpar f_1 definida por:

$$f_1(x) = \begin{cases} \cos(x) & -\pi < x \leq 0 \\ -\cos(x) & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Como f_1 é ímpar, temos que $a_n = 0$ e os b_n são dados por:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x)\sin(nx)dx$$

que fornece $b_1 = 0$ e para $n > 1$, obtemos:

$$b_n = \frac{2n}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\right)$$

Como $b_n = 0$ para todo n ímpar, assim basta tomar $n = 2k$ e os coeficientes pares:

$$b_{2k} = \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2 - 1}$$

A função $f(x) = \cos(x)$ inicialmente definida sobre o meio-intervalo $[0, \pi]$, possui a extensão ímpar de $f_1(x) = \cos(x)$ definida sobre todo o intervalo $[-\pi, \pi]$, tendo a série de Fourier:

$$\cos(x) \sim \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin(2kx)$$

13.3 Extensões de funções $2L$-periódicas

Como fizemos antes, podemos definir as séries de Fourier de senos e cossenos para funções $2L$-periódicas definidas sobre um intervalo $[-L, L]$. Se a função $f = f(t)$ é $2L$-periódica, a sua série de Fourier sobre $[-L, L]$ é definida por:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\frac{n\pi t}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi t}{L}) \right]$$

onde os coeficientes de Fourier são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos(\frac{n\pi t}{L}) dt$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin(\frac{n\pi t}{L}) dt$$

Proposição: Seja f uma função $2L$-periódica e definida sobre meio-intervalo $[0, L]$.

(1) Se f é par então $b_n = 0$ $(n \geq 1)$ e para $n \geq 0$:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

A série de Fourier tem a forma:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

(2) Se f é ímpar então $a_n = 0$ ($n \geq 0$) e para $n \geq 1$:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

Neste caso, a série de Fourier terá a forma:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

14 Outras formas de apresentar uma Série de Fourier

14.1 Forma simplificada da Série de Fourier

Como sempre é possível escrever $g(t) = B\cos(nt) + C\sin(nt)$ na forma $g(t) = A\cos(nt - \varphi)$, então podemos escrever a série de Fourier em uma forma simplificada contendo somente funções cosseno na soma. Para uma função 2π-periódica $f = f(t)$, escreveremos:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt - \varphi)$$

14.2 Forma complexa da Série de Fourier

A forma complexa da série de Fourier de uma função periódica real f pode ser obtida como uma combinação linear de funções exponenciais complexas.

Seja $f = f(x)$ uma função real 2π-periódica. A forma complexa da série de Fourier de $f = f(x)$ é dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

onde o coeficiente de Fourier complexo é dado por:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

para cada número $n \in Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

Observação: Se a função $f = f(t)$ é $2L$-periódica, o coeficiente complexo de Fourier para $f = f(t)$ é definido para cada $n \in \mathbf{Z}$, como

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\ e^{-in\pi t/L} dt$$

sendo a série de Fourier representada por

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/L}$$

Exemplo: Seja $f(t) = t$, for $t \in (-1, 1)$ e $f(t+2) = f(t)$. Os coeficientes complexos $\{c_n\}$ da série de Fourier de $f = f(t)$ são dados por $c_0 = 0$ e

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} t\ e^{-in\pi t} dt$$

Com alguns cálculos obtemos:

$$c_n = \frac{-1}{2} \left[\frac{e^{in\pi}}{in\pi} + \frac{e^{-in\pi}}{in\pi} - \frac{e^{in\pi}}{(in\pi)^2} + \frac{e^{-in\pi}}{(in\pi)^2} \right]$$

Como $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$, simplificamos c_n para:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(in\pi)}$$

logo, a forma complexa da série de Fourier de $f = f(t)$ será:

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in\pi}[e^{in\pi t} - e^{-in\pi t}]$$

que pode ser escrita na forma

$$f(t) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\ \sin(n\pi t)$$

14.3 Relação entre coeficientes reais e complexos

Existe uma íntima relação entre os coeficientes de Fourier reais e complexos para uma função periódica f.

Teorema: Se f é uma função 2π-periódica, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ os coeficientes de Fourier reais, $\{c_n\}$ os coeficientes complexos de Fourier de f, então existem três relações que fazem a conexão entre estes coeficientes da série de Fourier:

(1) $c_0 = \frac{1}{2}a_0$

(2) $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (n \geq 1)$

(3) $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (n \geq 1)$

Demonstração: Seja a forma real da série de Fourier para f dada por:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

onde a_0, a_n e b_n são números reais. Como para todo número complexo $z \in \mathbb{C}$ vale a relação de Euler:

$$e^z = \cos(z) + i\ \sin(z)$$

e em particular, obtemos

$$e^{inx} = \cos(nx) + i\ \sin(nx) \qquad \text{e} \qquad e^{-inx} = \cos(nx) - i\ \sin(nx)$$

A partir daí, podemos escrever que:

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) \qquad \text{e} \qquad \sin(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} - e^{-inx})$$

Substituindo estas duas últimas expressões na série de Fourier com coeficientes reais, teremos:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\ \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \ \frac{b_n}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})]$$

que pode ser escrita na forma:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n - ib_n}{2})\ e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n + ib_n}{2})\ e^{-inx}$$

Tomando $n \geq 1$ e

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

teremos a série:

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\ e^{-inx}$$

isto é

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\ e^{inx} + c_0\ e^{i0x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\ e^{inx}$$

que finalmente pode ser escrita na forma:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{inx}$$

Este teorema garante que a forma complexa da série de Fourier `coincide` com a forma real da série de Fourier. Cada uma das formas pode ser usada para tirar vantagem das propriedades matemáticas envolvidas com o contexto físico. No estudo de Sinais Digitais, Comunicação de Dados ou Computação Gráfica, é útil trabalhar com a série complexa.

15 Conexão entre a série de Fourier e a sua derivada

15.1 A derivada da série de Fourier

Há uma conexão entre os coeficientes complexos da série de Fourier de uma função f e os correspondentes coeficientes da série de Fourier da derivada de f.

Teorema: Se f é uma função diferenciável $2L$-periódica e

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

então

$$f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{in\pi}{L} \, c_n \, e^{in\pi x/L}$$

15.2 Resolução de EDOL com séries de Fourier

Inicialmente, Fourier estudava processos para resolver Equações Diferenciais Ordinárias Lineares (EDOL). Realizaremos a análise de algumas EDOL com coeficientes constantes de ordem 1 e 2, ao invés de estudar o caso geral.

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)$$

onde $f = f(x)$ é uma função 2π-periódica.

15.3 Solução de uma EDOL de primeira ordem por Série de Fourier

Seja f uma função 2π-periódica. Obteremos as soluções periódicas da EDOL:

$$y' + ay = f(x)$$

Vamos considerar que $f = f(x)$ possua a série de Fourier, sendo f_n os seus coeficientes complexos de Fourier, isto é:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\, e^{inx}$$

Seja $y = y(x)$ uma solução 2π-periódica da equação diferencial dada e vamos assumir que $y = y(x)$ possui a série de Fourier

$$y(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n\, e^{inx}$$

onde y_n são os coeficientes complexos de Fourier de $y = y(x)$.

Substituindo estas duas representações na EDOL dada, obteremos dois somatórios cujos coeficientes complexos de Fourier coincidem para todo $n \in \mathbb{Z}$, isto é

$$iny_n + ay_n = f_n$$

donde segue que para todo $n \in \mathbf{Z}$

$$y_n = \frac{f_n}{a + in}$$

Assim, se conhecermos os coeficientes f_n, nós teremos a solução da equação diferencial dada por:

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{f_n}{a+in} \right) e^{inx}$$

15.4 Solução de uma EDOL de segunda ordem por Série de Fourier

Seja f uma função 2π-periódica. Estudaremos agora as soluções periódicas da EDOL de segunda ordem:

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Consideraremos a série de Fourier de f, dada por

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{inx}$$

e a série de Fourier da função incógnita $y = y(x)$, dada por

$$y(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n \, e^{inx}$$

onde y_n são os coeficientes complexos de Fourier de $y = y(x)$.

Ao substituir estas representações na EDOL dada, obteremos dois somatórios cujos coeficientes de Fourier coincidem para todo $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left[(\frac{in\pi}{L})^2 + a\frac{in\pi}{L} + b \right] y_n = f_n$$

donde segue que para todo $n \in \mathbf{Z}$

$$y_n = \frac{f_n}{(\frac{in\pi}{L})^2 + a\frac{in\pi}{L} + b}$$

Assim, se conhecermos os coeficientes f_n, nós teremos a solução da equação diferencial dada por:

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{f_n}{(\frac{in\pi}{L})^2 + a\frac{in\pi}{L} + b} \right] e^{inx}$$

O que fizemos pode ser estendido a EDOL com **coeficientes constantes** de ordem n maior do que 2.

Referências bibliográficas utilizadas

[1] Figueiredo, Djairo Guedes Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, Coleção Euclides, IMPA/CNPq, Rio de Janeiro, 1986.

[2] Kaplan, Wilfred, Cálculo Avançado, Edgard Blücher Editora e EDUSP, (1972), São Paulo, Brasil.

[3] Kolmogorov, A.N. e Fomin, S.V., Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional, Editorial MIR, (1972), Moscou.

[4] Quevedo, Carlos P., Circuitos Elétricos, LTC Editora, (1988), Rio de Janeiro, Brasil.

[5] Spiegel, Murray, Análise de Fourier, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, (1976), São Paulo, Brasil.